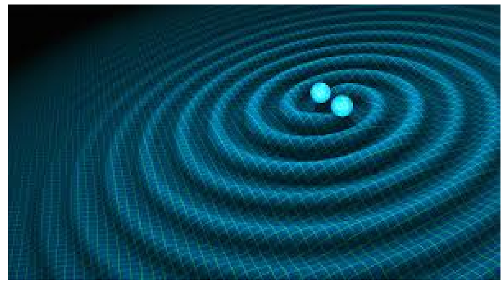
L'Attracteur
La revue de physique
série 2, numéro 3 — octobre 2016

Nouvelles scientifiques

Première détection des ondes gravitationnelles



La nouvelle scientifique majeure de 2016 est la première détection, par les instruments du projet LIGO, d'une onde gravitationnelle. Cette découverte, annoncée en février 2016, est décrite dans un article paru dans *Physical Review Letters* (vol 116, p. 061102 (2016)). La nouvelle a été abondamment relayée dans les médias. Rappelons les faits saillants :

► L'événement a été détecté le 14 septembre 2015. L'analyse des données a nécessité plusieurs semaines et l'annonce n'a été faite qu'en février 2016. La possibilité d'ondes gravitationnelles a été prédite par Einstein en juin 1916, mais il a fallu presque 50 ans avant que la communauté scientifique soit convaincue que le phénomène n'est pas seulement une illusion mathématique des équations d'Einstein, mais quelque chose d'observable en principe. L'existence de ces ondes a été confirmée indirectement en 1974 par l'observation du changement de période d'un pulsar binaire (dit de Hulse-Taylor), causé par l'émission d'ondes gravitationnelles.

► Une onde gravitationnelle est, grosso modo, la propagation, à la vitesse de la lumière, d'une déformation de l'espace dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation. Les longueurs relatives des deux bras perpendiculaires d'un interféromètre de Michelson (ayant la forme d'un «L») seront donc modifiées en antiphase par le passage d'une telle onde. Cependant, l'effet est minuscule : typiquement 10^{-22}, sur une échelle relative. L'interféromètre LIGO est conçu pour détecter une déformation de cet ordre, qui se traduit par une variation de longueur de l'ordre de 10^{-18}m (un millième de la taille d'un proton) sur la longueur de l'interféromètre (4 km).

► Quoique l'interféromètre soit conçu pour filtrer les nombreuses sources possibles de bruit, la détection des ondes gravitationnelles requiert l'utilisation de deux interféromètres identiques, séparés d'une distance suffisamment grande (3 000 km dans le cas de LIGO) pour éviter que le bruit local soit le même. Cette séparation spatiale permet aussi d'identifier partiellement l'origine de l'onde, en tenant compte du délai de détection entre les deux sites (au plus 10 ms dans ce cas).

► L'événement du 14 septembre 2015 a produit un signal concordant entre les deux sites. Des simulations numériques (produites en partie par un groupe de recherche de l'Université de Toronto utilisant les supercalculateurs opérés par Calcul Québec) ont permis d'interpréter le signal en fonction

L'Attracteur
Département de physique
2500, boul. de l'Université,
Sherbrooke (Québec)
J1K 2R1

physique@usherbrooke.ca

d'un événement cataclysmique : la fusion de deux trous noirs, respectivement de 29 et 36 masses solaires. Dans les derniers instants de cette fusion, les trous noirs n'étaient séparés que de quelques centaines de kilomètres et se déplaçaient à des vitesses allant jusqu'à $0,6\ c$. L'événement a dégagé une énergie équivalente à trois fois la masse du soleil (en utilisant $E = mc^2$) et la puissance du processus à sa fin était 50 fois supérieure à la puissance totale dégagée par les étoiles dans le reste de l'Univers.

LIGO Hanford WA

LIGO Livingstone LA

► Un autre événement a été détecté depuis (26 décembre 2015) et a fait l'objet d'une autre publication. Cette fois, il s'agit de la fusion de deux trous noirs dont les masses sont respectivement de 14 et 7 masses solaires. Le détecteur LIGO et ses successeurs ouvrent une nouvelle ère de l'astronomie : l'astronomie gravitationnelle, où les observations se font par détection d'ondes gravitationnelles au lieu d'ondes électromagnétiques (lumière visible, ondes radio, rayons gamma, etc.). Cette nouvelle méthode d'observation permettra de détecter des événements indétectables autrement, notamment parce qu'elle est omnidirectionnelle (elle ne requiert pas de pointer un instrument dans une direction précise inconnue à l'avance).

Découverte d'une exoplanète dans la zone «habitable» de l'étoile Proxima du Centaure

En ce mois d'octobre 2016, la *Exoplanet Orbit Database* recense presque 3000 planètes en orbite autour d'étoiles autres que le Soleil. Et si l'on tient compte des données accumulées par le télescope spatial Kepler, il y aurait en tout environ 5500 exoplanètes puisque pas moins de 2500 autres candidates ont un statut en attente de confirmation. Beaucoup de chemin a donc été parcouru depuis la découverte en 1995 de la première exoplanète autour de l'étoile 51 Pégase par M. Mayor et D. Queloz de l'Observatoire de Genève (Suisse).

Le 24 août 2016, l'Observatoire Européen Austral a tenu une conférence de presse pour annoncer la découverte d'une planète en orbite autour de l'étoile Proxima du Centaure. Le lendemain, la revue Nature publiait un article de 18 pages dans lequel sont détaillées l'instrumentation employée ainsi que la méthode d'analyse des données (courbes de vitesses radiales de l'étoile, technique déjà employée par Mayor et Queloz en 1995 pour 51 Pégase à l'Observatoire de Haute-Provence, France). Trois années d'observations ont été nécessaires pour confirmer l'existence de cette planète suspectée depuis au moins 16 ans. La planète, baptisée Proxima Centauri b, possède plusieurs caractéristiques remarquables :

1. Son étoile hôte, Proxima du Centaure, est l'étoile la plus proche de notre système solaire, à quelque 4,25 années-lumière de la Terre. Cette étoile, une naine rouge de magnitude apparente relativement faible, a elle-même été découverte il y a à peine un siècle ;

2. En raison de notre méconnaissance de l'orientation précise de son orbite, on ne peut mesurer que la masse *minimale* de Proxima Centauri b. Celle-ci serait d'environ 1,27 masses terrestres et on aurait donc affaire à une planète rocheuse de masse quelque peu supérieure à celle de la Terre ;
3. Enfin, la distance qui sépare la planète de l'étoile combinée à la température de surface de Proxima du Centaure (qui rayonne seulement 0,15% de la luminosité solaire) font que la température d'équilibre radiatif de Proxima Centauri b serait compatible avec la présence d'eau à l'état liquide à sa surface ! Néanmoins, pour que de l'eau à l'état liquide soit bien présente, il apparaît indispensable que la planète soit entourée d'une atmosphère suffisamment épaisse pour assurer un effet de serre suffisant et une redistribution efficace (tout autour de la planète) de l'énergie stellaire interceptée. Si cela s'avère être bien le cas, alors on pourra affirmer que Proxima Centauri b se situe dans ce que l'on nomme la *zone habitable* de son étoile, soit une région de l'espace où les conditions sont considérées favorables à l'apparition de la vie.

Proxima Centauri b abrite-t-elle la vie ? Pour s'approcher d'une réponse, de nombreuses autres études, techniquement difficiles, sont encore nécessaires, notamment en ce qui concerne la composition de l'atmosphère de la planète : par exemple, la détection de vapeur d'eau dans l'atmosphère renforcerait certainement l'hypothèse de présence d'eau liquide à la surface, et donc possiblement de la vie. Mais rappelons aussi qu'une planète située dans la zone habitable d'une étoile a beau être vue potentiellement capable d'héberger une forme de vie extraterrestre, les limites de cette zone sont par contre calculées à partir des éléments connus de la biosphère terrestre. Implicitement, cela suppose que la vie extraterrestre aurait toujours les mêmes besoins de développement que la vie terrestre : cela est possiblement réducteur. De plus, des conditions additionnelles pourraient fort bien rendre habitables des planètes situées hors de la fameuse zone habitable.

Vue d'artiste d'un paysage à la surface de Proxima Centauri b (source : `www.eso.org`)

Le tord-méninges

Considérons une planète sphérique homogène de densité ρ et de rayon R. En supposant qu'elle ne possède pas d'atmosphère, et donc qu'il n'y a pas de résistance de l'air, quel serait le temps requis par un satellite en orbite tout juste à la surface de cette planète pour atteindre l'antipode de sa position, c'est-à-dire pour effectuer une demi-orbite circulaire autour de la planète ? Supposons maintenant qu'on puisse creuser un puits d'un côté à l'autre de la planète, passant par son centre, et qu'on laisse tomber un objet dans ce puits. En combien de temps l'objet atteindrait-il l'antipode ? Pouvez-vous expliquer la valeur relative de ces deux intervalles de temps sans faire de calcul complexe ?

(solution à la fin)

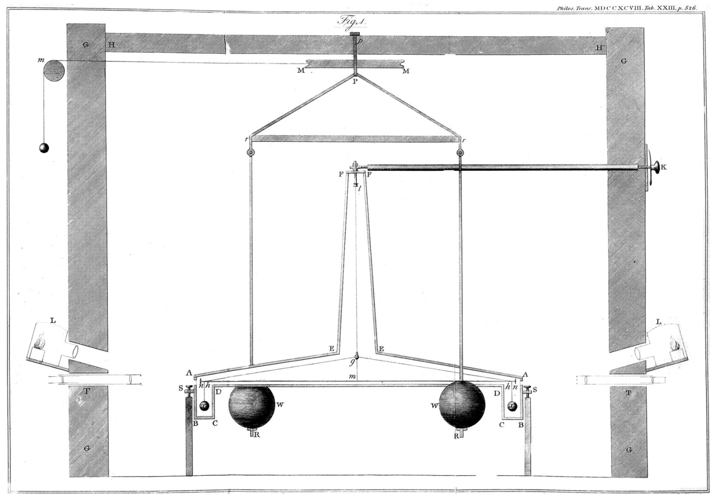
Démonstrations

Il est possible de se procurer des aimants permanents très forts, à base de néodyme, ayant la forme d'une bille. Sur le marché, ces billes aimantées sont couramment appelées «buckyballs» et servent généralement de jouet en raison des formes variées qu'elles peuvent former lorsqu'on les place à proximité les unes des autres (voir cet article de wikipédia). Cependant, même avec une seule bille aimantée, on peut observer un phénomène intéressant, comme illustré par ce vidéo : lorsqu'on fait rouler la bille sur une surface parfaitement plane, loin de tout métal ferromagnétique, la bille suit une trajectoire complexe, quasi impossible à prédire, alors qu'une bille non aimantée roulerait le long d'une trajectoire rectiligne, à vitesse constante. Comment peut-on expliquer un tel phénomène ?

Une réponse immédiate et irréfléchie impliquant une «force magnétique» est fausse. Il n'y a aucune «force magnétique» nette agissant sur la bille. Essentiellement, la bille est un aimant possédant un certain moment dipolaire magnétique $\mathbf{M}$, dont la direction est fixe par rapport aux axes internes à la bille. Le vecteur $\mathbf{M}$ décrit l'intensité de l'aimantation ainsi que sa direction (la direction du vecteur est celle du pôle nord magnétique de la bille). En présence d'un champ magnétique externe $\mathbf{B}$, la bille subit un couple de force $\mathbf{N} = \mathbf{M} \wedge \mathbf{B}$ (produit vectoriel), mais pas de force nette, sauf si le champ externe n'est pas uniforme dans le volume de la bille. Le champ magnétique terrestre (entre $2{,}5 \times 10^{-5}$ et $6{,}5 \times 10^{-5}$ tesla, selon la position géographique) est suffisant pour causer un couple appréciable, mais son gradient est tout à fait négligeable dans le volume de la bille.

Par contre, la bille roule sur une surface, et donc une force de frottement est à l'oeuvre. En l'absence de champ magnétique, la bille tombe rapidement dans un régime de roulement sans glissement, dans lequel le point de contact de la bille avec la surface est instantanément immobile. Dans ce cas, la force de frottement est inopérante. Par contre, si la bille subit un couple magnétique, son moment cinétique va varier en fonction du temps et le mouvement de rotation de la bille ne sera plus «en phase» avec son mouvement de translation, de sorte que le point de contact de la bille avec la surface ne sera plus instantanément au repos. La force de frottement dynamique sera alors à l'oeuvre ; étant la seule force agissant le long de la surface, elle causera une accélération de la bille dans le plan. Comme le moment magnétique est lié aux axes de la bille, sa direction change constamment, ainsi que la direction du couple magnétique associé et que la direction de la vitesse angulaire de la bille. Par conséquent, la direction de la vitesse du point de contact de la bille avec la surface est aussi changeante, et la force de frottement associée est dans la direction opposée à cette vitesse, ce qui cause un mouvement très complexe, dont le détail dépend aussi beaucoup des conditions initiales du lancement de la bille.

Saviez-vous que...



Cavendish a pesé la Terre en 1797. La loi de la gravitation universelle de Newton (1686), $F = Gm_1m_2/r^2$ a complètement changé la relation de l'humanité au système solaire et à l'Univers. Mais Newton avait laissé une constante de proportionnalité G inconnue. Newton a posé que la force entre deux objets ponctuels est simplement proportionnelle au produit de leurs masses et inversement proportionnelle au carré de leur distance. Il a prouvé que cette loi s'appliquait aussi aux objets sphériques de densité constante à condition qu'on mesure la distance entre le centre de masse des objets. Il fallut attendre plus de cent ans, soit jusqu'en 1797, avant qu'Henry Cavendish, un aristocrate au comportement appartenant au spectre de l'autisme, commence à l'âge de 67 ans une expérience utilisant la loi de force de Newton pour mesurer la densité moyenne de la Terre ρ_T.

Héritier d'une immense fortune, Cavendish la consacra à de nombreuses expériences scientifiques. Celle qui lui permit de mesurer ρ_T consistait à mesurer comment un haltère formé de deux sphères de plomb, de densité et de rayon connus, attachées à une tige de bois, était attiré par un autre haltère de même diamètre, mais composé de deux sphères de plomb très lourdes suspendues séparément et arrangées de manière à exercer un couple sur l'haltère léger. Ce dernier était attaché à un fil libre de tourner. L'angle de torsion du fil était calibré pour mesurer la force. À l'aide de poulies, Cavendish manipulait à distance l'haltère lourd pour l'approcher du plus léger afin de moduler la force gravitationnelle entre les haltères. Il mesura ainsi directement la force d'attraction entre les haltères. La force entre les sphères de plomb et la Terre est obtenue simplement par une balance. En prenant le rapport de ces forces, connaissant la densité de la sphère de plomb, son rayon, ainsi que celui de la Terre, et la distance entre les grosses et les petites sphères de plomb, il put déterminer la densité de la Terre à l'aide de la loi de Newton.

Pour faire ses mesures, Cavendish observa l'oscillation du petit haltère de l'extérieur de son laboratoire à l'aide d'un télescope pour éviter les courants d'air. Il minimisa les changements de température, s'assura de l'absence d'aimantation, de l'effet de la tige de bois, tint compte en somme, de façon obsessive, de toutes les possibilités d'erreurs. Ceci lui permit de déterminer ρ_T avec une précision de 1%, inégalée pendant près d'un siècle. Henry Cavendish est considéré comme l'un des pères de la chimie et il contribua à comprendre certaines notions de thermodynamique, d'électricité et de magnétisme. Mais il est resté célèbre surtout pour avoir pesé la Terre et indirectement déterminé l'une des constantes fondamentales de la nature : G, qui n'est apparue explicitement dans la littérature que plus tard (Cornu, A. ; Baille, J. B. ; Comptes Rendus Acad. Sci. 76 : 954–958 (1873)).

Références :

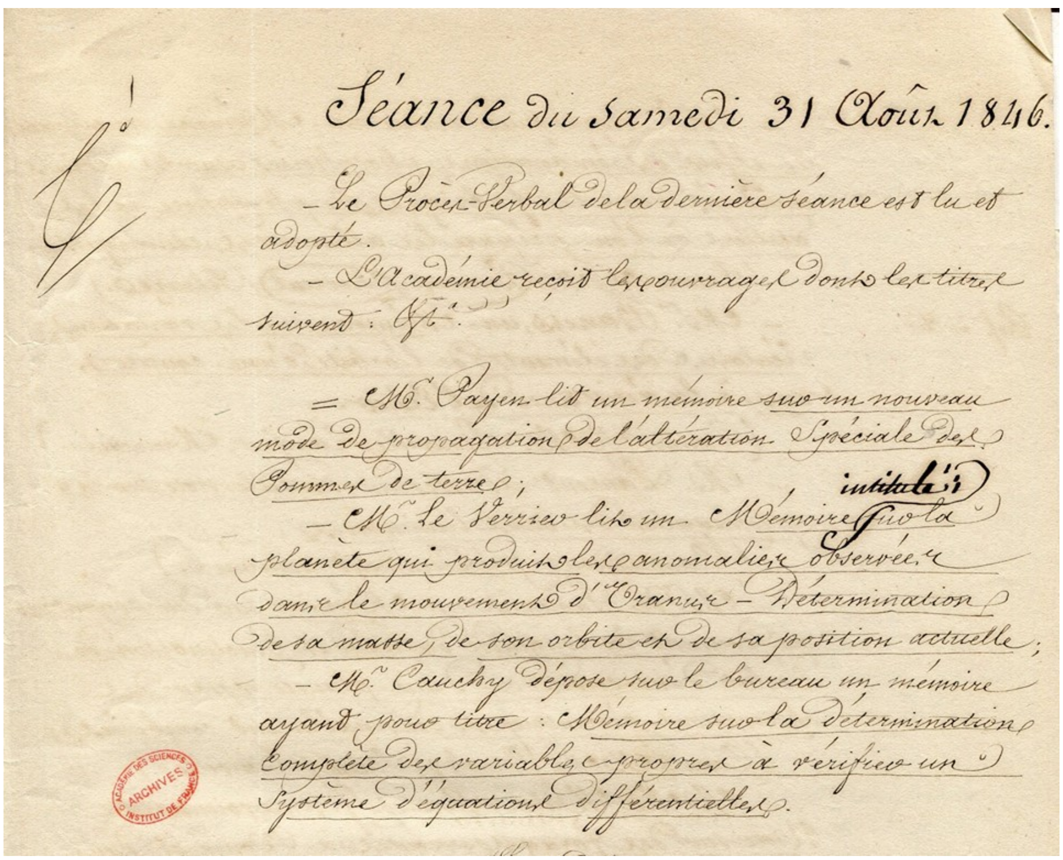
https://fr.wikipedia.org/wiki/Henry_Cavendish

https://en.wikipedia.org/wiki/Cavendish_experiment

https://www.aps.org/publications/apsnews/200806/physicshistory.cfm

Neptune : la planète calculée

Il y a 170 ans, Le Verrier découvrait Neptune par le calcul. Le 31 août 1846, le mathématicien et astronome français Urbain Le Verrier (1811-1877) annonçait à l'Académie des Sciences de Paris la découverte de Neptune (voir le procès-verbal plus bas). Ce jour-là, il présentait un mémoire dans lequel il calculait la position approximative de Neptune sur la base des anomalies du mouvement d'Uranus. Par la suite, Neptune a effectivement été observée dans la région prévue de la sphère céleste par l'astronome allemand Johann Galle à l'observatoire de Berlin le 23 septembre 1846, et ce, à l'aide d'un petit télescope de seulement 23 cm de diamètre. Neptune a été identifiée à moins de un degré de la position calculée par Le Verrier ! La découverte de Neptune a été le centre de nombreuses polémiques et altercations (souvent acerbes) entre la France et l'Angleterre quant à la paternité de la découverte : en effet, des calculs semblables (mais non publiés) ont été réalisés un an plus tôt par le mathématicien et astronome britannique John Adams. Adams et Le Verrier n'avaient pas connaissance de leurs travaux respectifs. Notons que, malgré la forte rivalité franco-anglaise ambiante, les deux astronomes ont toujours entretenu une relation amicale dès leur première rencontre de juin 1847. Bien que les caractéristiques de la planète aient été déterminées par Adams avant Le Verrier, et malgré les réclamations britanniques, Le Verrier fut considéré comme le découvreur de la planète. A posteriori cela semble justifié, d'anciens documents retrouvés en 1999 montrent que les prédictions d'Adams variaient et étaient bien moins précises, s'étendant sur plus de 20°, ce qui renforce l'antériorité de la découverte par Le Verrier.



Séance du samedi 31 Août 1846.

— Le Procès-Verbal de la dernière séance est lu et adopté.

— L'Académie reçoit les ouvrages dont les titres suivent : &c.

= M. Payen lit un mémoire sur un nouveau mode de propagation de l'altération spéciale des Pommes de terre ;

— M. Le Verrier lit un Mémoire intitulé : sur la planète qui produit les anomalies observées dans le mouvement d'Uranus — Détermination de sa masse, de son orbite et de sa position actuelle ;

— M. Cauchy dépose sur le bureau un mémoire ayant pour titre : Mémoire sur la détermination complète des variables propres à vérifier un système d'équations différentielles.

Radiation gravitationnelle et diminution de la période orbitale d'une planète autour d'une étoile

Vers 1865, Maxwell a établi les équations qui portent son nom et qui régissent les phénomènes électriques et magnétiques. Tout comme les équations de Maxwell prédisent l'existence d'ondes électromagnétiques (EM), la théorie de la relativité générale d'Einstein prédit la possibilité d'ondes gravitationnelles (OG) : la propagation, à la vitesse de la lumière dans le vide, d'ondulations dans le tissu de l'espace-temps. Cette émission est associée à un flux d'énergie, tout comme la propagation d'une onde EM.

Durant les années 1970-80, l'étude du pulsar binaire PSR B1913+16 (composé de deux étoiles à neutrons, dont un pulsar), a mis en évidence, de manière *indirecte*, l'existence des ondes gravitationnelles. En effet, les impulsions radio émises par le pulsar peuvent être mises en relation avec l'évolution de la période orbitale du système et il a été clairement constaté que celle-ci diminuait avec le temps, impliquant que le système perd de l'énergie. Le taux de perte d'énergie estimé par cette voie empirique est en très bon accord avec la perte d'énergie par rayonnement gravitationnel telle qu'annoncée par Einstein en 1916 (mieux qu'à 0,02% près, comme une réanalyse des données effectuée en 2004 l'a montré). En 1993, Joseph Taylor et Russell Hulse ont obtenu le prix Nobel de physique pour ce travail.

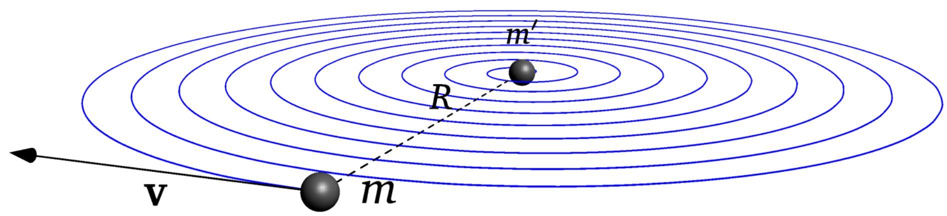
2015 marque le centenaire de la relativité générale et la première détection directe d'ondes gravitationnelles

Fin novembre 2015, la théorie d'Einstein a fêté son centenaire couronné certes de nombreux succès, mais également marqué par la déception de l'absence d'une détection *directe* de telles ondes. La principale difficulté réside dans leur très petite amplitude. Le *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory* (LIGO) a redémarré en septembre 2015, après 5 ans de travaux pour hausser son seuil de détection. Quand une onde gravitationnelle le traverse, cet interféromètre modifie légèrement les longueurs de ses bras, et l'observatoire peut repérer ces changements avec une sensibilité d'une partie pour 10^{22} ! Une semaine après sa mise en marche, plusieurs rumeurs ont commencé à circuler à propos d'une possible découverte d'onde gravitationnelle. Plusieurs étaient en effet intimement persuadés que LIGO disposait enfin de la sensibilité nécessaire pour accomplir l'exploit observationnel tant espéré. Ils avaient bien raison d'être optimistes : le 11 février 2016, une communication officielle de LIGO annonçait enfin la première détection *directe* émanant d'un trou noir binaire sur la base de données obtenues le 14 septembre 2015. Et puis c'est un second signal du même type qui a été annoncé le 15 juin 2016, associé à un événement observé le 26 décembre 2015 (voir nouvelle, page 1).

Par rayonnement gravitationnel, on entend l'émission d'OG prédite par la relativité générale et consécutive à l'accélération de masses. Cela est analogue à l'émission de rayonnement électromagnétique par accélération de particules électriquement chargées. Dans ce qui suit, l'analyse dimensionnelle et quelques connaissances de mécanique classique nous permettront d'établir le taux de perte d'énergie par émission d'ondes gravitationnelles pour une planète en orbite circulaire autour d'une étoile. Par la suite, nous en déduirons la variation du rayon orbital au cours du temps. Nous constaterons que pour une configuration comparable au système Soleil-Terre l'effet est insignifiant, au contraire du pulsar binaire PSR B1913+16 qui est un système serré à période très courte (environ 7,8 heures) et donc le siège d'effets relativistes généraux particulièrement forts. Les deux événements de septembre et décembre 2015 détectés par LIGO sont de leur côté encore plus intenses.

On peut faire une analogie entre le rayonnement d'OG et le rayonnement quadripolaire électrique.

On considère une planète de masse m en orbite circulaire autour d'une étoile de masse $m' \gg m$ avec une période orbitale $T = 2\pi/\omega$. La vitesse de rotation



uniforme est notée V, et R est le rayon de l'orbite. D'abord, notons que l'amplitude d'une onde gravitationnelle doit être proportionnelle au moment d'inertie mR^2 de la planète autour de l'étoile. Une analogie avec l'électromagnétisme va nous permettre de comprendre pourquoi il en est ainsi. Une particule ponctuelle chargée possédant l'accélération a émet des radiations électromagnétiques dont la puissance totale émise est proportionnelle à a^2 (formule de Larmor). À grande distance d'une assemblée de charges électriques q_i, on peut montrer que ce sont les oscillations des dipôles électriques de moment dipolaire total $\mathbf{d} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i$ qui sont responsables du rayonnement. Ces dipôles électriques, en plus du rayonnement, sont la source d'un potentiel électrique qui décroît comme $1/r^2$ avec la distance. La puissance totale émise qui en découle est alors intimement reliée à la formule de Larmor puisqu'elle est alors proportionnelle à $\ddot{\mathbf{d}}^2$. On se doute qu'en théorie relativiste de la gravitation il doit en aller qualitativement de même, mais l'analogue du moment dipolaire électrique pour des masses m_i est $\sum_i m_i \mathbf{r}_i$, dont la dérivée seconde par rapport au temps ne peut qu'être nulle en raison de la conservation de la quantité de mouvement ! Cela signifie que le terme dominant du rayonnement gravitationnel est plutôt *quadripolaire*, c'est-à-dire associé à un potentiel en r^{-3} (au lieu de r^{-2}). Une analyse dimensionnelle justifie alors le fait que l'amplitude d'une onde gravitationnelle doive donc être proportionnelle au moment d'inertie.

Une formule pour la puissance rayonnée en OG peut être trouvée par analyse dimensionnelle

Par analyse dimensionnelle, il est facile de montrer que la puissance a pour dépendances $[P] = MV^3L^{-1}$, en fonction des grandeurs M(masse), L(longueur) et V(vitesse). D'autre part, on anticipe que la puissance P_{circ} du rayonnement gravitationnel pour une orbite circulaire dépende *a priori* des paramètres m, R, ω et des constantes G, c. Enfin, P_{circ} doit être proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde. On écrira donc $[P_{\text{circ}}] = M^2L^4[G]^\gamma[\omega]^\eta[c]^\nu$ où γ, η, ν sont des constantes à déterminer sachant que $[P_{\text{circ}}] = MV^3L^{-1}$, $[G] = M^{-1}V^2L$ et $[\omega] = VL^{-1}$. L'analyse dimensionnelle conduit aux trois équations,

$$\begin{aligned} &2 - \gamma = 1 \rightarrow \gamma = 1 \\ &2\gamma + \eta + \nu = 3 \rightarrow \eta + \nu = 1 \\ &4 + \gamma - \eta = -1 \rightarrow \eta = 6 \end{aligned}$$

et $\nu = -5$, pour enfin obtenir $P_{\text{circ}} = AGm^2\omega^6R^4c^{-5}$, où A est une constante dont la valeur exacte, $32/5$, ne peut être obtenue que par une analyse détaillée dans le cadre strict de la relativité générale ; on admet cette valeur de $A = 32/5$ pour toute la suite.

On suppose maintenant que la trajectoire circulaire est peu perturbée par l'émission d'OG au cours d'une révolution, et qu'il s'agit du seul processus physique responsable d'une perte d'énergie. Il est aisé de vérifier que, pour une trajectoire circulaire, l'énergie mécanique totale s'écrit $E(t) = -\frac{1}{2}Gmm'/R(t)$ où $R(t)$ est le rayon instantané de la trajectoire. On déduit alors que,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{Gmm'}{2R^2}\frac{dR}{dt}$$

Cette relation montre bien qu'une perte d'énergie totale entraîne nécessairement un rapprochement des deux astres, et éventuellement la coalescence. À l'aide du théorème de la puissance cinétique ($P_{\text{circ}} = dE_c/dt$, où E_c est l'énergie cinétique), de la troisième loi de Kepler ($R^3/T^2 = G(m+m')/4\pi^2 \approx Gm'/4\pi^2$ ou $\omega^2 R^3 = Gm'$) et de la conservation de l'énergie (qui se traduit ici par $P_{\text{circ}} = -dE/dt$) on a même,

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{64}{5c^5} mm' \left(\frac{2\pi G}{T}\right)^2$$

À l'aide de la troisième loi de Kepler, on trouve

$$\frac{dT}{dR} = \frac{3\pi}{Gm'} R^{1/2} \quad \text{et enfin} \quad \frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dR}\frac{dR}{dt}$$

donne après simplifications :

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{192\pi}{5c^5} mm'^{2/3} \left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{5/3}$$

À partir de ce dernier résultat, une simple intégration nous permet d'estimer la durée $\Delta t = t - t_0$ prise par le système pour passer de sa trajectoire actuelle, de période T_0 à l'instant $t = t_0$, à la trajectoire de période T à une date t ultérieure (on note $k \equiv \frac{192\pi}{5c^5} mm'^{2/3} (2\pi G)^{5/3}$) :

$$\Delta t = \frac{3}{8k} \left(T_0^{8/3} - T^{8/3}\right)$$

Le temps nécessaire pour que la Terre s'écrase sur le Soleil en raison de l'émission d'ondes gravitationnelles équivaut à 10^{13} fois l'âge de l'Univers

Pour la Terre ($m = 6 \times 10^{24}$ kg) en orbite autour du Soleil ($m' = 2 \times 10^{30}$ kg et $T_0 = 31,5 \times 10^6$ s), on trouve un effet particulièrement insignifiant $dT/dt \approx -3,5 \times 10^{-24}$ avec $k \approx 1,1 \times 10^{-11}$ SI. La coalescence du système (obtenue pour $T \to 0$) prendrait donc la durée considérable $\Delta t \approx 3,3 \times 10^{30}$ s, soit environ 10^{23} années, ou 10^{13} fois l'âge de l'Univers. Un calcul semblable pour le pulsar binaire PSR B1913+16, mais qui tiendrait en outre compte de l'excentricité de l'orbite – environ 0,6 – et du fait que les deux étoiles ont des masses comparables, aboutirait à un temps de coalescence de l'ordre de seulement 300 millions d'années, preuve que ce système est le siège de champs gravitationnels particulièrement forts. Quant à la coalescence observée en septembre 2015 par LIGO, notons qu'en seulement 0,2 seconde la fréquence orbitale est passée de 35 Hz à 150 Hz pour une puissance rayonnée qui a atteint une valeur maximale autour de 200 fois l'énergie de masse du Soleil par seconde ($200 M_\odot c^2/s$).

Une carrière en physique

Dave Allen est diplômé en physique de l'Université de Sherbrooke. Il a complété sa maîtrise et son doctorat sous la supervision du P^{r} David Sénéchal. Il a ensuite effectué un stage postdoctoral de deux ans à l'Université Oxford et un autre stage d'un an au Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) en France. Depuis 15 ans, il travaille en recherche opérationnelle, d'abord au département de la Défense Nationale et, depuis 4 ans, à l'Organisation du traité de l'Atlantique Nord (OTAN).

La recherche opérationnelle peut être définie comme l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles orientées vers la recherche du meilleur choix dans la façon d'opérer. Elle fait appel aux méthodes d'optimisation (avec ou sans contraintes), à la théorie des jeux, aux méthodes statistiques, ainsi qu'aux méthodes de mathématiques discrètes et méthodes géométriques. Des exemples de problèmes résolus à l'aide de la recherche opérationnelle incluent :

- La détermination du trajet optimal pour déminer un champ de mines étant donné une contrainte de temps.
- La détermination de la flotte navale idéale considérant un ensemble donné d'objectifs stratégiques.

La recherche opérationnelle doit souvent tenir compte de facteurs non quantitatifs qui sont parfois difficiles à incorporer dans une étude purement mathématique. Des approches heuristiques et approximatives peuvent toutefois fournir de bonnes indications afin d'obtenir des solutions satisfaisantes.

L'apport d'un physicien. Bien que n'ayant pas une formation spécifique en recherche opérationnelle, un physicien par sa formation mathématique, sa capacité à modéliser des phénomènes naturels et ses connaissances technologiques peut contribuer de façon significative aux études opérationnelles. Une compréhension des limites imposées par les lois physiques est certainement un atout afin d'améliorer les études d'optimisation.

Solution au tord-méninges

Le satellite est en orbite circulaire à une vitesse v et subit une accélération centripète égale à $v^2/R = GM/R^2$, où $M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$ est la masse de la planète. Donc la vitesse du satellite est $v = \sqrt{GM/R}$ et le temps requis pour parcourir une demi-circonférence est $\pi R/v = \pi R\sqrt{R/GM} = \pi R\sqrt{3R/4\pi G\rho R^3} = \sqrt{3\pi/4G\rho}$. Dans le cas du puits, il faut tenir compte de la variation du champ gravitationnel $g(r)$ en fonction de la distance r au centre de la planète. À une valeur donnée de r, seule la masse contenue dans une sphère de rayon r contribue au champ gravitationnel et donc $g(r) = GM(r)/r^2$, où $M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$. L'accélération de l'objet dans le puits est donc $a = g(r) = \frac{4}{3}\pi G\rho r$, ce qui correspond à une force proportionnelle à la distance r au centre de la planète. Il s'agit donc d'une force harmonique, comme celle produite par un ressort de constante $k = \frac{4}{3}\pi m G\rho$ (m étant la masse de l'objet). Le mouvement causé par cette force sera donc une oscillation sinusoïdale, comme celle d'une masse attachée à un ressort. La fréquence d'un tel mouvement est $\sqrt{k/m}/2\pi$ et la demi-période associée est $\pi\sqrt{m/k} = \pi\sqrt{3/4\pi G\rho} = \sqrt{3\pi/4G\rho}$, soit exactement le même temps que pour le satellite.

Comment est-ce possible ? Les deux situations sont en fait deux trajectoires différentes d'un objet sous l'influence d'une force proportionnelle à la distance à l'origine en deux dimensions, comme si l'objet était attaché à un ressort de longueur à l'équilibre nulle, dont l'autre extrémité est attachée à l'origine. Ce ressort est libre de pivoter dans le plan. Le mouvement de l'objet est alors la composition d'une oscillation en x et d'une oscillation en y, les deux à la même fréquence. Dans le cas du satellite, les deux oscillations sont de mêmes amplitudes, mais déphasées de $\pi/2$, produisant une trajectoire circulaire. Dans le cas du puits, l'amplitude est nulle dans une direction, produisant une trajectoire linéaire. Dans les deux cas la fréquence est la même.

Une dernière remarque : imaginer le mouvement d'un objet au travers d'un puits qui traverse la Terre est certes un rêve, mais il a été suggéré par l'auteur grec Plutarque au 2ᵉsiècle de notre ère, dans une remarquable intuition qui préfigure le principe d'inertie. Plutarque se demandait quel serait le mouvement d'un objet qui tombe jusqu'au centre de la Terre. Selon Aristote, l'objet devrait s'arrêter net au centre, car il cherche à rejoindre le centre de la sphère associée à l'élément «terre». Plutarque a plutôt suggéré que l'objet devrait osciller indéfiniment autour du centre (la réponse correcte). Cette remarque de Plutarque porte à penser que les Anciens avaient une connaissance du principe d'inertie (proposé par Galilée 15 siècles plus tard), mais que cette opinion, minoritaire dans la communauté de l'époque, s'est perdue.