

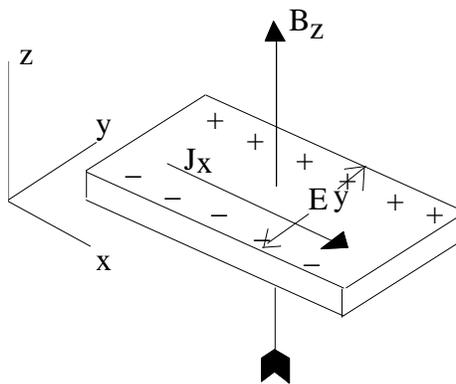
L'EFFET HALL QUANTIQUE

Le but de cette expérience est d'observer le phénomène de l'effet Hall quantique qui a été découvert en 1980 par von Klitzing. Ce dernier a reçu le prix Nobel de physique en 1985 pour sa découverte qui continue de susciter beaucoup d'intérêt de la part des théoriciens et des expérimentateurs. La reproductibilité de la hauteur des plateaux de Hall est telle qu'on s'en sert depuis quelques années comme standard du ohm (Voir le texte officiel envoyé par le Bureau international des poids et mesures de Paris dont une copie se retrouve sur le montage). Vous aurez entre autres à vérifier avec la plus grande précision possible la hauteur de ces plateaux.

1. INTRODUCTION

Cas 3D :

Il y a plus de cent ans que E. H. Hall a remarqué qu'un champ magnétique appliqué perpendiculairement à la direction du courant dans un semiconducteur provoquait l'apparition d'une tension dans la troisième direction perpendiculaire.



Cette tension provient des porteurs de charge qui sont déviés sur les côtés de l'échantillon par la force de Lorentz. L'équilibre s'établit lorsque la force magnétique est égale à celle produite par le champ électrique résultant de l'accumulation de charges sur les bords de l'échantillon (champ de Hall : $E_y = v_x B_z$). Le coefficient de Hall est défini par la relation :

$$R_H = \frac{E_y}{B_z J_x}$$

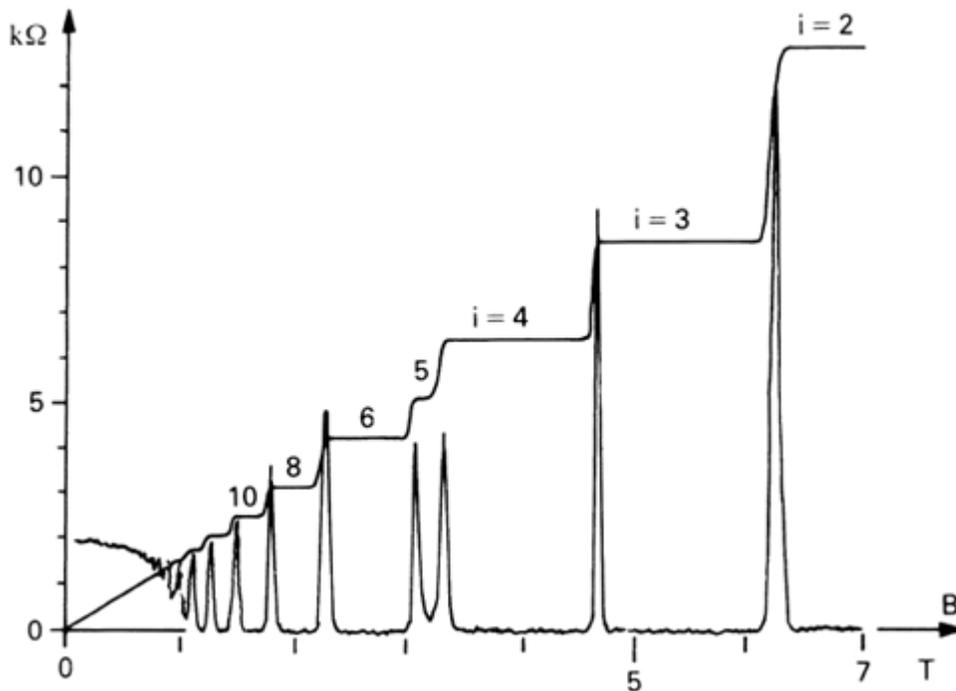
et comme la densité de courant est donnée par $j_x = v_x Ne$ alors $R_H = 1/Ne$ dans le cas où il n'y a qu'un seul type de porteur. R_H est donc utilisé pour mesurer la densité de porteurs dans

l'échantillon. Généralement, on utilise un courant fixe pour effectuer la mesure de la tension de Hall.

Note : On parle également de résistance de Hall. Il s'agit simplement du ratio de la tension de hall sur le courant circulant dans l'échantillon. Il ne faut cependant pas confondre la résistance de Hall avec R_H . Notez que la résistance de Hall varie linéairement avec le champ B.

Cas 2D :

Dans un semiconducteur à deux dimensions, l'effet Hall est également mesurable. Par contre, à suffisamment basse température, on observe une série de plateaux pour la résistance de Hall en fonction du champ magnétique. Ces plateaux apparaissent à des valeurs précises de résistance, et ce, indépendamment de l'échantillon utilisé. La résistance de Hall est quantifiée en unités de h/e^2 divisé par un entier. C'est ce qu'on appelle l'effet hall quantique (EHQ).



La figure précédente (tirée de <http://www.nonequilibrium.net/195-integer-quantum-hall-effect-diagonal-resistivity/>) illustre le phénomène dans un échantillon de GaAs-GaAlAs à ~30mK. On a également tracé la composante diagonale de la résistivité (ρ_{xx}) qui montre des régions de résistance nulle là où les plateaux apparaissent. Les indices des plateaux sont, à partir du haut à droite, 1,2,3,4,5,6,8,... Les indices impairs correspondent aux plateaux pour lesquels l'énergie de Fermi se situe **dans un gap de spin** alors que les indices pairs sont utilisés pour le gap entre deux niveaux de Landau. Comme la séparation entre deux niveaux de spins opposés est faible comparativement à la séparation entre niveaux de Landau, on observe les plateaux associés aux indices impairs qu'à très fort champ magnétique. L'effet Hall quantique possède les caractéristiques suivantes :

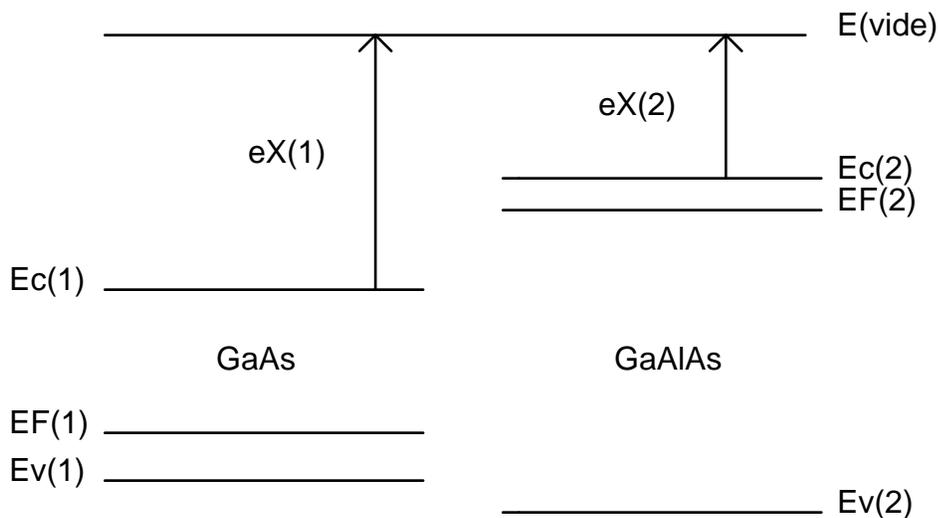
- La valeur de la résistance de Hall (V_y/I_x) est uniquement fonction de constantes physiques fondamentales (h et e) et n'est pas déterminée par la géométrie.
- Cette résistance est précise à plus de 1 partie pour 10^8 .
- Elle est utilisée comme étalon pour le Ohm. 1 Klitzing vaut 25,813 ohm.

Note : Dans le graphique précédent vous avez vu que la résistivité est donné en ohm/sq (ohm/carré ou encore Ω/\square). Référez-vous à l'annexe 3 pour l'explication de ces unités.

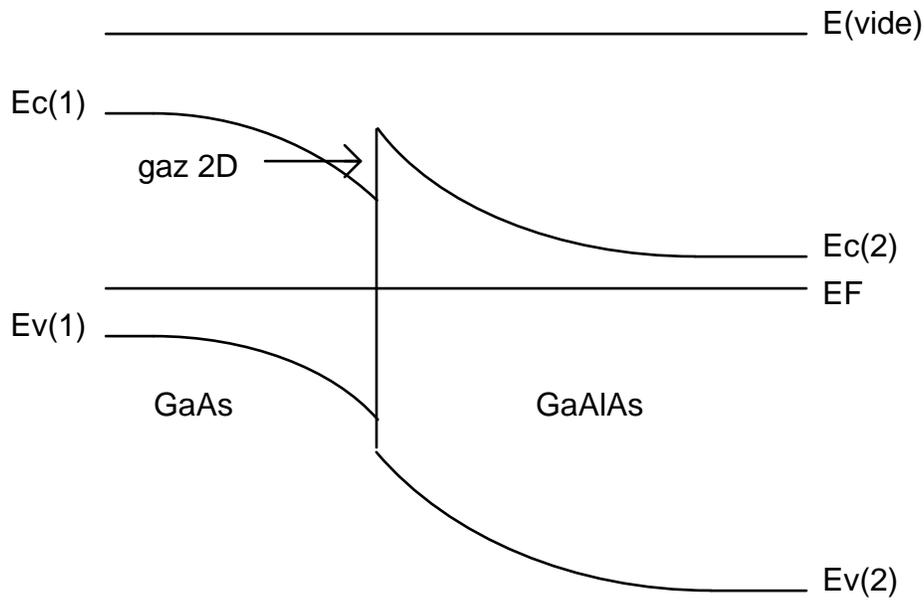
2. THÉORIE

2.1 Fabrication des échantillons

Depuis quelques années, on peut fabriquer des hétérostructures de grande qualité, notamment par l'épithaxie par jets moléculaires. La mieux connue est celle de GaAs-GaAlAs. Imaginons la situation avant que les semiconducteurs se touchent:

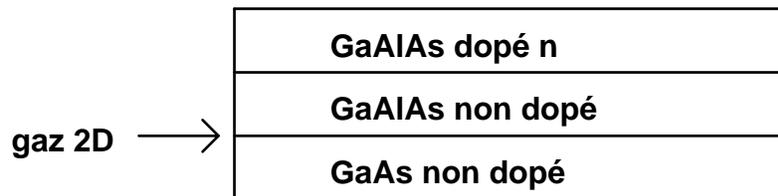


Dans une hétérostructure, les niveaux de Fermi des deux substances doivent s'équilibrer et les électrons se déplacent du GaAlAs au GaAs. Ceci crée une barrière Schottky et un puits de potentiel qui emprisonne les électrons en ce qui touche la direction \hat{z} .



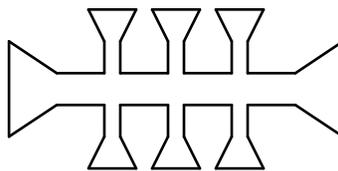
Nous avons donc un gaz d'électrons bi-dimensionnel (2D).

Un gaz bi-dimensionnel d'électrons (ou de trous) est nécessaire pour observer l'effet Hall quantique. Nous vous fournissons donc un échantillon dont la structure ressemble à ceci:



Remarquez la couche non dopée de GaAlAs qui permet de séparer spatialement les donneurs du gaz 2D. Cette astuce se nomme modulation de dopage et donne lieu à des mobilités beaucoup plus élevées.

Grâce à un procédé photolithographique, on a donné à votre échantillon la forme conventionnelle pour des mesures d'effet Hall et de résistivité. Vu du dessus, il ressemble à ceci:



2.2 Échantillon dans un champ magnétique

Si on applique un champ magnétique assez intense, la densité d'états subit d'importants changements (voir Blakemore ou Kittel). En appliquant un champ magnétique perpendiculaire au plan d'un gaz d'électrons 2D, les trajectoires des électrons deviendront des cercles autour des lignes de champ. La fréquence de rotation des électrons sur ces orbites (appelée fréquence cyclotron) est donnée par :

$$\omega_c = \frac{eB}{m^*} \quad (1)$$

La contribution à l'énergie électronique provenant de ce mouvement dans le plan est quantifiée en unités de $\hbar\omega$ et donne lieu à l'apparition de niveaux d'énergie appelés niveaux de Landau ayant les énergies suivantes :

$$E = E_i + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c \quad (2)$$

où l'indice i représente une sous bande particulière et $n=0,1,2,3,\dots$. Si l'on considère maintenant le spin ($s=\pm 1/2$) de l'électron l'équation précédente devient :

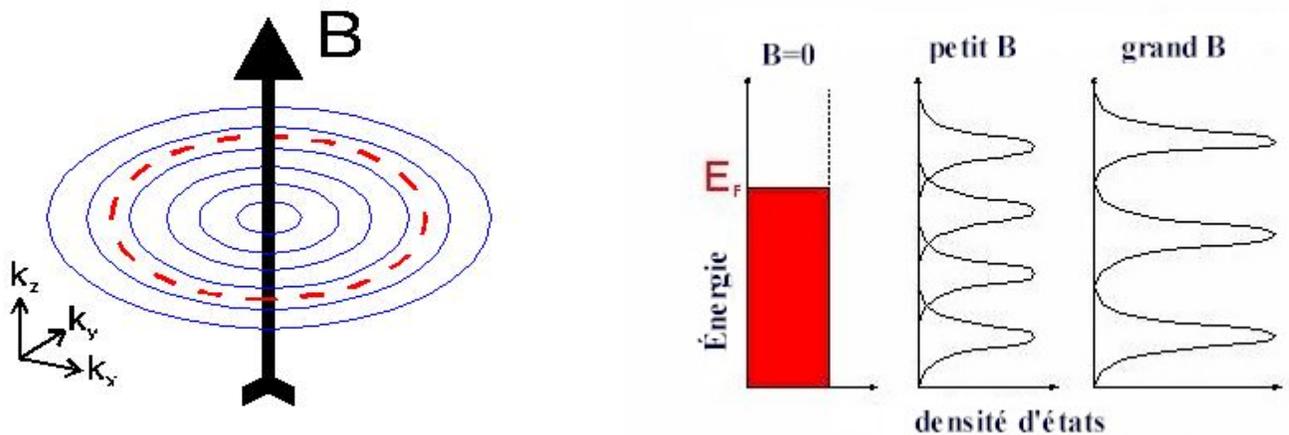
$$(3) \quad \boxed{E = E_i + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c + sg\mu_B B}$$

Le facteur de Landé « g » est caractéristique du matériau. La densité d'états d'un niveau de Landau est égale à $\frac{eB}{h}$.

En 3D, on obtiendrait le résultat suivant : $E = E_i + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} + sg\mu_B B$

ce qui montre que chaque bande se divise en une infinité de paraboles séparées par $\hbar\omega_c$.

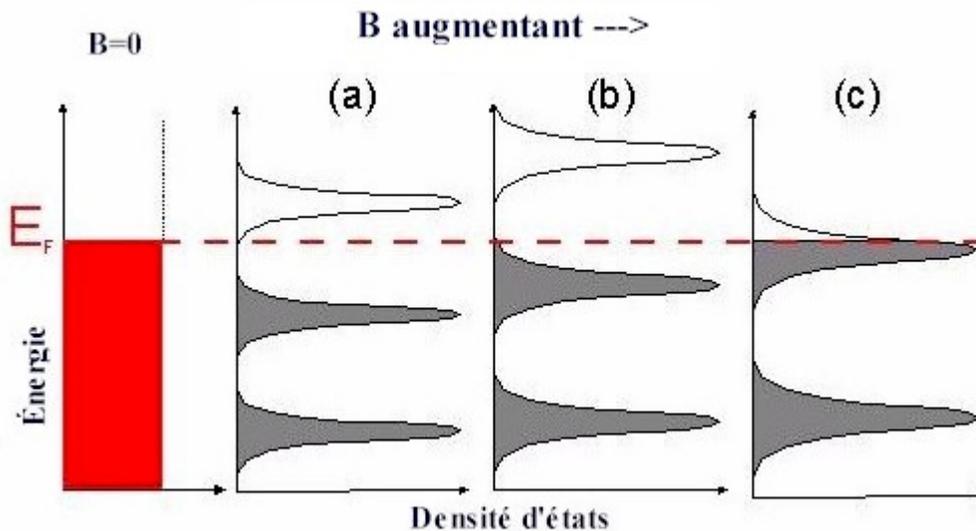
Les figures ci-dessous illustrent le situation en 2D :



Lorsque le champ magnétique augmente, la séparation entre chaque niveau de Landau augmente aussi. En pratique, les niveaux de Landau possèdent également une largeur. Cet élargissement des niveaux est causé par la présence de défauts ou d'impuretés qui donnent naissance aux fluctuations de potentiel dans le matériel. On verra plus loin qu'il est nécessaire d'avoir un élargissement des niveaux pour observer l'EHQ.

Note : On parle habituellement « d'états libres » pour le centre d'un niveau de Landau et « d'états localisés » pour les queues de ces niveaux.

2.3 Explication de l'EHQ



Nous allons voir comment les zéros de résistivité ρ_{xx} de même que les plateaux de ρ_{xy} sont intimement reliés ensemble et qu'on peut les expliquer par le schéma des niveaux de Landau ci-haut. Pour mieux comprendre, vous pouvez aussi consulter l'animation à la page web suivante sur Wikipédia :

<http://en.wikipedia.org/wiki/File:QuantumHallEffectExplanationWithLandauLevels.ogv>

En l'absence de champ magnétique, la densité d'états d'un système 2D est une constante. Lorsqu'on applique le champ magnétique, on fait apparaître une série de niveaux séparés les uns des autres par $\hbar\omega_c$. On remarque qu'il y a des régions entre les niveaux où il n'y a pas d'états accessibles. Au fur et à mesure que l'on augmente le champ, les niveaux de Landau traversent le niveau de Fermi. Posons $E=E_F$ (l'énergie de Fermi qu'on suppose fixe) et balayons le champ magnétique. Lors de ce balayage, l'équation (3) sera satisfaite pour une série de champs B_n . La séquence de ces champs est périodique en $1/B_n$. (Voir l'ANNEXE 1)

En pratique ceci signifie que toutes les propriétés physiques dépendant des électrons ont un comportement oscillatoire avec le champ lorsque les conditions expérimentales le permettent e.g. l'effet Shubnikov de Haas (résistivité), l'effet de Haas Van Alphen (susceptibilité magnétique) etc.

Dans le cas classique en 3D, on obtient que la résistance de Hall vaut B/Ne (où N est la densité de porteurs). Dans le cas présent, on remarque que lorsque le niveau de Fermi se situe entre deux niveaux de Landau, seuls les niveaux sous E_F contribuent à la conduction. Comme chacun de ces niveaux renferme eB/h électrons on a donc que la résistance de Hall est donnée par :

$$\rho_{xy} = \frac{h}{ie^2} \quad (\text{avec } i = 1, 2, 3, \dots)$$

où l'indice i représente le nombre de niveaux de Landau remplis. Contrairement au cas classique, on voit ici que dans l'EHQ la valeur de la résistance de Hall ne peut varier tant que le niveau de Fermi se trouve dans un gap d'énergie comme c'est le cas dans la figure précédente entre les champs (a) et (b). Il en résulte donc un plateau dans la mesure de ρ_{xy} . C'est uniquement rendu au champ (c), lorsque le niveau de Fermi traverse un niveau de Landau, que la valeur de ρ_{xx} peut changer et que l'on observe une valeur finie de résistance. Ceci provient du fait qu'on observe une résistance uniquement lorsqu'il y a des processus de diffusion et que seuls les niveaux autour de E_F contribuent à ces diffusions. Lorsque E_F se trouve dans un gap, il ne peut donc pas y avoir de diffusion et on observe donc des zéros de résistance.

2. Manipulations expérimentales

Familiarisez-vous avec le système à vide, l'aimant supraconducteur, et le programmeur de champ auprès du moniteur. Mesurez les dimensions et les résistances entre les contacts de l'échantillon à la température ambiante. Faites une simulation d'un balayage du champ magnétique après avoir court-circuité l'aimant supraconducteur.

Vous devrez faire circuler un courant de 2×10^{-6} amp. dans l'échantillon lorsque celui-ci sera dans l'hélium liquide. Puisque sa résistance changera de plusieurs ordres de grandeur selon le champ magnétique, comment allez-vous maintenir un courant constant?

On vous fournira de l'aide pour le transfert d'hélium liquide dans le cryostat de l'aimant. Branchez vos appareils de mesures à l'ordinateur pour l'acquisition des données. Ajustez le programmeur de champ pour un balayage de 20-30 minutes. Mesurez ensuite la résistance longitudinale et l'effet Hall en fonction du champ magnétique. Faites l'expérience à 4.2K et à 2.2K. Afin d'atteindre 2.2K, il faut diminuer la pression sur le bain d'hélium tel qu'illustré à l'ANNEXE 4.

3. Calculs et questions

Calculez les nombres quantiques (expérimentaux) correspondant aux extréma de résistivité et aux plateaux de Hall en traçant une droite inspirée de l'équation (3).

Calculez la période des oscillations en fonction de la densité des porteurs en deux dimensions en vous inspirant du texte à l'ANNEXE 1.

Calculez la densité de porteurs dans votre échantillon selon **deux méthodes indépendantes**. Comment se comparent vos valeurs?

Calculez la mobilité de ces porteurs selon la définition impliquant la vitesse des porteurs et le champ électrique. Calculez aussi une valeur minimale de mobilité basée sur le temps entre deux collisions d'un électron dans un champ magnétique.

Que pouvez-vous dire du facteur g de votre échantillon? La valeur citée dans la littérature est-elle valable pour votre échantillon selon vos résultats? (Note : il y a plusieurs façons de déduire la valeur de g . Il est bon de les explorer et de voir laquelle peut donner les meilleurs résultats.)

La précision de la hauteur des plateaux de Hall mérite-t-elle son utilisation comme standard du ohm?

Références

1. J. S. Blakemore, Solid State Physics
2. C. Kittel, Introduction to Solid State Physics
3. C. Cohen-Tannoudji et al, Mécanique quantique, Tome 1.
4. H. L. Stormer, D.C. Tsui, Science, Vol. 220, page 1241 (1983).
5. D.C. Tsui, A.C. Gossard, Applied Physics Letters, Vol. 38, page 550, (1981).
6. D.C. Tsui, H.L. Stormer, A.C. Gossard, Physical Review B, Vol. 25, page 1405 (1982).
7. M.E. Cage, S.M. Girvin, « The Quantum Hall Effect » dans Comments on Solid State Physics, Vol. 11, page 1, (1983).
8. B. Sapoval & C. Hermann, Physics of semiconductors. Springer-Verlag, 1955.

Barème de correction du rapport

Introduction et conclusion	1
Théorie	2
Montage et fonctionnement	1
Présentation des résultats	1
Analyse	4.5
Présentation générale et qualité du français	<u>0.5</u>
TOTAL	10

© Guy Bernier, coordonnateur des travaux pratiques
Département de Physique, U. de Sherbrooke

8 septembre, 2010
P.F.

ANNEXE 1 : LIEN ENTRE LA PÉRIODE DES OSCILLATIONS ET LA DENSITÉ DE PORTEURS

On peut montrer qu'un état électronique occupe un volume $(2\pi)^3/V$ dans l'espace k . V est le volume du cristal dans l'espace réel. Afin de calculer la densité d'états, on considère une coquille d'épaisseur dk dans l'espace k . Son volume est

$$4\pi k^2 dk.$$

Le nombre d'états dans cette coquille est donc

$$\frac{V 4\pi k^2 dk}{8\pi^3} = \frac{1}{2} \frac{V k^2 dk}{\pi^2}$$

Si on inclut le spin, il faut doubler ce nombre. Rappelons aussi que l'énergie d'un électron peut être représentée par

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}.$$

La densité d'états est donc

$$g(E)dE = \frac{V k^2 dk}{\pi^2} = \frac{V m^* \sqrt{2m^* E} dE}{\pi^2 \hbar^3}$$

Le nombre d'électrons par unité de volume sera

$$N = \int_0^{E_F} \frac{g(E)}{V} f(E) dE$$

Or, à basse température $f(E) = 1$ de 0 à E_F .

$$N = \frac{\sqrt{2m^*} E_F^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{E_F} \sqrt{E} dE$$

ce qui donne

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m^*} (3\pi^2 N)^{2/3}$$

Montrer que la période

$$P = \Delta \left(\frac{1}{B} \right) = \frac{\hbar e}{m^* E_F}$$

et donc

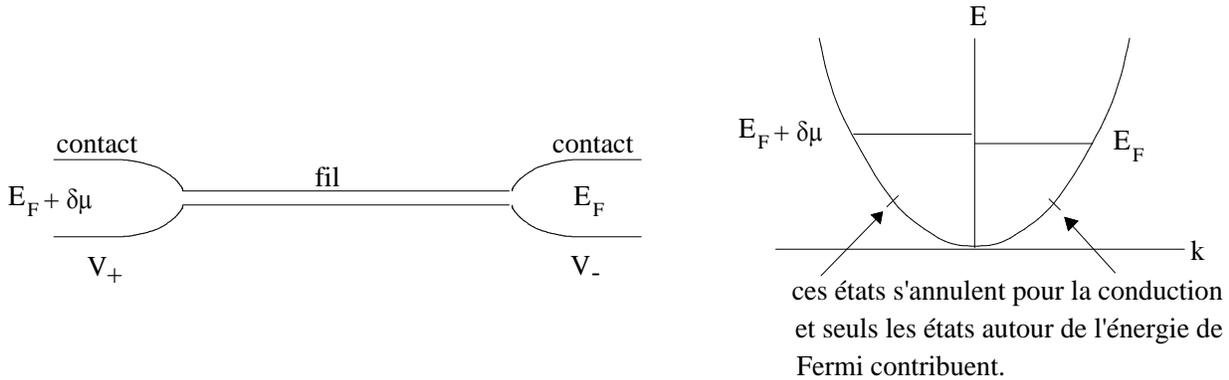
$$P = \frac{2e}{\hbar (3\pi^2 N)^{2/3}}$$

en trois dimensions.

Faites la démonstration analogue en deux dimensions, ce qui vous aidera à évaluer la "densité" de porteurs de votre échantillon.

ANNEXE 2 : CONDUCTION À UNE DIMENSION

Supposons un fil très fin relié par deux contacts électriques. Le fil est tellement fin qu'il s'agit d'un problème à une dimension (1D). Supposons également qu'il n'y a pas de collisions. Nous allons montrer que la conductance d'un tel système est quantifiée et indépendante du nombre d'électrons présents.



La relation de dispersion ci-dessus montre clairement que seuls les états situés près de E_F auront une contribution nette au courant. On peut donc écrire :

$$\bar{I} = -nev \quad \text{et} \quad \delta\mu = V_+ - V_- = \frac{\delta\mu}{e} \quad (\delta\mu: \text{diff de potentiel chimique})$$

$$I = e \int_{E_F}^{E_F + \delta\mu} \rho(E) v(E) dE \approx e \rho(E_F) v(E_F) \delta\mu$$

Comme un état occupe une longueur 2π dans l'espace k à 1D, la densité d'états s'écrit :

$$\rho(E) = \frac{1}{2\pi} \frac{dE}{dk} \quad \text{et la vitesse de groupe : } v(E) = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk}$$

Cela permet de réécrire le courant comme :

$$I = e \frac{1}{2\pi} \frac{dE}{dk} \times \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} \delta\mu = \frac{e}{h} \delta\mu = \frac{e^2}{h} \delta V$$

Note : à cause du caractère particulier 1D, les termes $\frac{dE}{dk}$ de la densité d'états et de la vitesse de groupe se simplifient mutuellement et le courant se retrouve indépendant de la forme de la relation de dispersion (transport balistique).

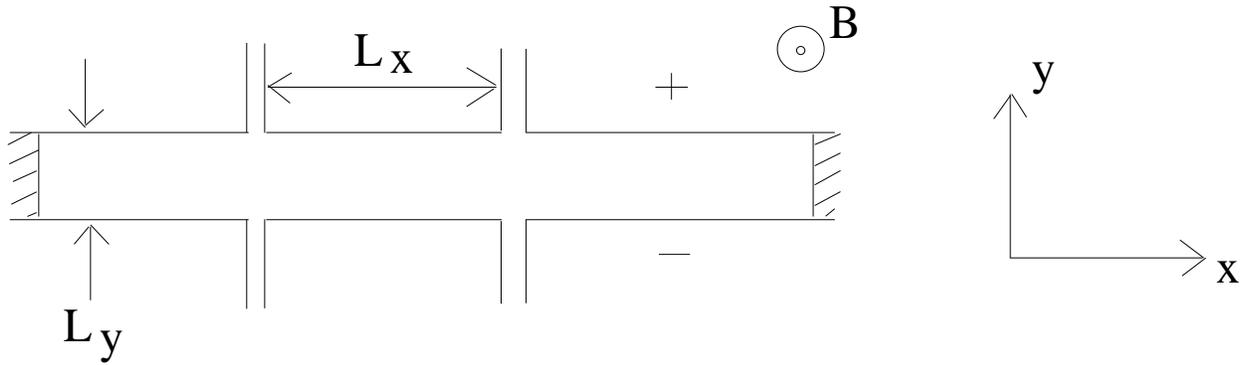
La conductance G étant définie comme le rapport du courant sur la tension on trouve :

$$G = \frac{I}{\delta V} = \frac{e^2}{h}$$

On trouve donc une conductance finie même en l'absence de collisions. La loi d'Ohm n'est maintenant plus valide ici car si on place deux fils quantiques bout à bout la conductance (et évidemment la résistance) demeure la même.

Dans l'effet Hall quantique, on peut montrer que chaque niveau de Landau agit comme un canal de conduction 1D qui contribue à la conductance pour une valeur de $\frac{e^2}{h}$ (par spin).

ANNEXE 3 : Conductivité à 2D



$$J_x = \frac{I_x}{L_y} \quad \text{La densité de courant selon } \hat{x}. \quad \text{On note : } V_x = L_x E_x \quad \text{qui sont les quantités mesurées.}$$

$$V_H = E_y L_y$$

$$I_x = J_x L_y$$

(on suppose des densités de courant uniformes).

$$J_y = 0 \quad \text{imposé}$$

$$\Rightarrow J_x = \sigma_{xx} E_x + \sigma_{xy} E_y \quad (1)$$

$$J_y = 0 = -\sigma_{xy} E_x + \sigma_{xx} E_y \Rightarrow \sigma_{xy} E_x = \sigma_{xx} E_y \quad (2)$$

$$(2) \rightarrow (1) \quad J_x = \sigma_{xx} E_x + \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_{xx}} E_x = \frac{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}{\sigma_{xx}} E_x = \frac{1}{\rho_{xx}} E_x$$

de même,

$$J_y = \left(\frac{\sigma_{xx}^2}{\sigma_{xy}} + \sigma_{xy} \right) E_y = \frac{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}{\sigma_{xy}} E_y = \frac{E_y}{-\rho_{xy}}$$

$$R_{xx} = \left| \frac{V_x}{I_x} \right| = \frac{L_x E_x}{J_x L_y} = \frac{L_x}{L_y} * \frac{E_x}{J_x} = \frac{L_x}{L_y} \rho_{xx}$$

$$R_{xy} = \left| \frac{V_y}{I_x} \right| = \left| \frac{V_H}{I_x} \right| = \frac{L_y E_y}{J_x L_y} = \left| \frac{E_y}{J_x} \right| = |\rho_{xy}|$$

- On voit premièrement que la résistance et la résistivité on les mêmes unités en 2D. Par contre, la détermination de ρ_{xx} via R_{xx} fait intervenir un facteur géométrique L_x/L_y ; pour signaler qu'on a en tenu compte on note les unités en Ω/\square .
- ρ_{xy} est indépendant des facteurs géométriques.

ANNEXE 4 Pompage sur le bain d'hélium

Consulter la personne en charge de cette expérience.