



# RELATIVITÉ GÉNÉRALE

## PHQ-615

| <b>COURS</b>               |                     |
|----------------------------|---------------------|
| <b>Titre :</b>             | Relativité Générale |
| <b>Sigle :</b>             | PHQ-615             |
| <b>Crédits :</b>           | 3 (3 1 5)           |
| <b>Travaux dirigés :</b>   | 1 heure / semaine   |
| <b>Travail personnel :</b> | 5 heures / semaine  |
| <b>Session :</b>           | 6                   |

| <b>PROFESSEUR</b>               |  |
|---------------------------------|--|
| <b>Nom :</b>                    | Yves Grosdidier<br>(chargé de cours à forfait) |
| <b>Bureau :</b>                 | D2-2245  |
| <b>Téléphone :</b>              | (819) 821-8000 poste 62056                     |
| <b>Jours de disponibilité :</b> | habituellement de 9h30 à 15h30                 |
| <b>Courriel :</b>               | Yves.Grosdidier@USherbrooke.ca                 |

| <b>PLACE DU COURS DANS LE PROGRAMME</b> |  |
|---|--|
| Type de cours :                         | Optionnel                              |
| Cours préalables :                      | PHQ 134 Relativité et physique moderne |

## DESCRIPTION DU COURS

Ce cours optionnel s'adresse aux étudiant(e)s fortement motivé(e)s et intéressé(e)s par la physique théorique. Les objectifs généraux sont 1) de faire acquérir les notions essentielles sur l'espace-temps physique intrinsèquement courbé et la théorie géométrique de la gravitation d'Einstein, et 2) d'apprendre et maîtriser le langage mathématique (algèbre et analyse tensorielles) nécessaire pour élaborer une description adéquate de l'espace-temps et donc permettre la compréhension de phénomènes gravitationnels désormais classiques.

On se restreindra à l'approximation des champs dits faibles pour lesquels la linéarisation des équations différentielles de la relativité générale conduisent à des solutions pertinentes pour plusieurs problèmes classiques d'astrophysique et de cosmologie.

La philosophie de ce cours est de démontrer la quasi-totalité des résultats mathématiques et physiques du programme (en supposant acquises les connaissances qu'on est en droit d'exiger des étudiant(e)s en fin de baccalauréat de physique). On n'admettra donc que fort peu de notions, ce qui rend ce cours autonome puisqu'il donne la part belle à une démarche purement hypothético-déductive. Par exemple, on s'autorisera à admettre un résultat de géométrie différentielle concernant la forme mathématique la plus générale du tenseur d'Einstein (Elie Cartan, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1, 1922, pp. 141-203). La démonstration de Cartan, bien que sa conclusion soit d'une portée fondamentale, présente en effet peu d'intérêt pour le physicien qui débute en relativité générale. Par contre, on n'escamotera jamais des calculs comme ceux relatifs au problème dit de Kepler (dans une métrique de Schwarzschild) ou même des calculs purement mathématiques comme le calcul explicite de la courbure d'une sphère ou d'autres types de formes géométriques simples. Cela étant, certains développements (parfois très) laborieux seront simplement décrits dans leurs grandes lignes en classe, mais les notes de cours comprennent tous les calculs dans le moindre détail. Il est alors de la responsabilité des étudiant(e)s d'étudier en profondeur ces calculs en dehors des heures de cours.

Il y a de nombreuses façons plus ou moins savantes (voire pédantes) de développer de manière analytique les grands résultats classiques de la relativité générale. Pour ce cours, l'approche privilégiée est celle qui présente le plus de naturel pour un physicien qui débute en la matière. Cette approche n'apprendra rien aux spécialistes de la relativité, mais offre aux étudiant(e)s toute la suite logique des démonstrations qui les amèneront à pouvoir un jour comprendre les points de vue récents (souvent très sophistiqués du point de vue mathématique) de la relativité générale et de la cosmologie modernes. Le cours est très proche dans son esprit de l'ouvrage de Andrillat : *Introduction à l'étude des cosmologies*, Paris 1970, mais on s'efforce de détailler la plupart des calculs qui ne sont qu'effleurés (souvent) dans ce dernier livre pour des raisons éditoriales. Plus récent et complet et dans le même esprit éditorial, on conseille également l'ouvrage *Relativité générale* de Hobson, Efstathiou et Lasenby, New York 2006.

## PLAN DE LA MATIÈRE

La matière repose sur i) un cours magistral, ii) un ensemble de problèmes à résoudre (sessions d'exercices en classe, devoirs), et iii) un travail personnel conséquent comprenant l'étude détaillée des notes de cours.

## COURS MAGISTRAL

*Les points 1. et 2. (rappels de relativité restreinte) seront plus ou moins développées en fonction des besoins des étudiants tout le long de la session. Il est à noter que l'approche de la relativité restreinte se voudra un peu différente de celle déjà vue, en général, par les étudiant(e)s en insistant sur une représentation de l'espace-temps plat comme espace vectoriel muni d'une forme quadratique particulière. La relativité générale proprement dite concerne les points 3. et suivants.*

1. Rappels de relativité restreinte (espace-temps plat) en termes de « boosts » (cadre : espace de Minkowski, i.e. espace vectoriel à 4 dimensions muni d'une forme quadratique particulière) ; transformation spéciale de Lorentz et applications au phénomène de l'aberration et à l'effet Doppler-Fizeau ; cinématique relativiste ; « paradoxe » des voyageurs de Langevin dans une métrique non-euclidienne (l'inégalité triangulaire inversée illustre le phénomène).
2. Dynamique relativiste (à partir de « Newton dit vrai à vitesse nulle ») ; relation d'équivalence entre la masse et l'énergie ; électrodynamique relativiste ; tenseur électromagnétique de Faraday et transformation des champs ; tenseur des contraintes électromagnétiques de Maxwell.
3. Les bases du calcul tensoriel : notion de variété à  $n$  dimensions ; transformations par invariance, covariance et contravariance ; systèmes tensoriels et champs de tenseurs, produit tensoriel, multiplication extérieure, contraction et produit contracté ; critères de tensorialité.
4. Forme quadratique fondamentale ; rappels de la théorie des déterminants et application au tenseur métrique complètement contravariant ; courbes géodésiques ; dérivée covariante ; le tenseur de Riemann-Christoffel et ses contractions ; tenseur de Ricci, courbure scalaire ; relation fondamentale de la relativité générale.
5. Exemples de métriques (polaire, sphérique, etc.) et calculs de leurs géodésiques ; courbure scalaire d'une sphère, d'un tore, d'un cylindre, etc.
6. Principe d'équivalence ; exemple de l'observateur uniformément accéléré en mécanique classique ; les forces d'inertie centrifuge et de Coriolis déduites du principe d'équivalence.
7. Métrique de Schwarzschild et applications : avance du périhélie de Mercure et déviation des rayons lumineux au voisinage des masses (lentille gravitationnelle) ; coordonnées comobiles ; décalage spectral gravitationnel (effet Einstein) ; effet Doppler-Fizeau généralisé ; métrique de Kruskal.
8. Retour sur le « paradoxe » des voyageurs de Langevin du point de vue de la relativité générale ; trajectoires radiales et non-radiales des photons autour d'un trou noir.
9. Principe de Mach et tenseur impulsion énergie ou comment généraliser l'équation de Poisson classique pour obtenir les équations de la gravitation relativiste ; ondes gravitationnelles (effet du passage d'une onde sur une distribution de masses, production des ondes gravitationnelles, énergie des ondes gravitationnelles).
10. Equations d'Einstein ou équations des cosmologies ; tenseur impulsion-énergie dans le cas d'un fluide parfait ; équation de Tolman-Oppenheimer-Volkoff ; notion de trou de ver.
11. Modèles d'Univers statiques et non-statiques : premières solutions et principe cosmologique.

En plus des notes du professeur, certains documents additionnels seront déposés sur la page Moodle du cours.

**Il n'est pas nécessaire de se procurer un manuel additionnel.**

## ÉVALUATION

L'évaluation reposera sur :

- Intra : 30%
- Examen final : 40%
- Devoirs (au nombre de 5) : 30%

En cas de circonstances extraordinaires au-delà du contrôle de l'Université et sur décision de celle-ci, l'évaluation des apprentissages dans ce cours est sujette à changement.

## BIBLIOGRAPHIE COMMENTÉE

Quelques ouvrages (souvent en français) dont la consultation est recommandée, utile ou bien seulement inspirante (les côtes données en italiques sont celles de la bibliothèque des sciences et de génie).

- M. Séguin et B. Villeneuve, *Astronomie et astrophysique : cinq grandes idées pour explorer et comprendre l'univers*, (Editions du Renouveau Pédagogique, 2002). *QB 43.2 S43 2002 D* et *QB 43.2 S43 2002*. **Bon livre pour dégrossir certaines idées d'astrophysique et de cosmologie, mais le niveau est trop élémentaire.**
- C.W. Misner, K.S. Thorne et J.A. Wheeler, *Gravitation*, (W.H. Freeman & Co. Ed. San Francisco, 1973). *QC 178 M57 1973*. **Excellente référence mais qui peut être jugée trop touffue...**
- M.P. Hobson, G.P. Efstathiou et A.N. Lasenby, *Relativité générale, une introduction pour physiciens*, (Groupe De Boeck Bruxelles, 2010). *QC 173.6 H6314 2010*. **Excellente référence et source d'inspiration du cours PHQ 615.**
- D. F. Lawden « *Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology* » (ISBN: 0-486-42540-1; Dover Publications Inc., 1982). *QC 173.55 L39 2002*. **Excellente référence (même si certaines notations sont un peu vieillotes, surtout en restreinte).**
- R. Hakim, *Gravitation relativiste*, (CNRS Editions, 2001). *QB 462.65 H34 2001*. **Excellente référence.**
- G. Pascoli, *La gravitation*, (Presses Universitaires de France, collection *Que Sais-Je* n° 2489, 1989). *AC 20 Q84 V.2489* (à la bibliothèque de Sciences Humaines seulement). **Même si la**

collection *Que Sais-Je* est généralement d'un niveau trop élémentaire dans ses volumes consacrés aux sciences, il s'avère que ce petit livre de 128 pages est une très bonne référence.

- H. Andrillat, *Introduction à l'étude des cosmologies*, (Paris : Armand Colin, 1970). *QB 43.2 A55I 1970* (un exemplaire se trouve à la bibliothèque des sciences et génie, un autre à celle des sciences humaines !). **Excellente référence pour ce qui concerne la cosmologie relativiste et les résultats classiques de la relativité générale même si beaucoup de démonstrations sont absentes.**