

Chapître 4: Champ E dans les isolants (diélectriques)

4.1 Polarisation

4.2 Champ d'un objet polarisé

notion de charges liées

4.3 Champ de déplacement

4.4 Diélectriques linéaires

Matière supplémentaire: énergie dans un isolant

Champs électriques dans les milieux pondérés

Rappel: Conducteurs:

- Charges se déplacent avec une certaine liberté,
- Ressource “infinie” de charges, un ou deux par atome
- Métaux: électrons se déplacent d’un atome à l’autre
- Gaz et liquides: ions sont mobiles
- Une certaine résistance s’oppose au déplacement des charges, sauf pour les supraconducteurs

Isolants = matériaux diélectriques:

- Electrons sont fortement liés à leurs atomes/molécules, neutralité locale

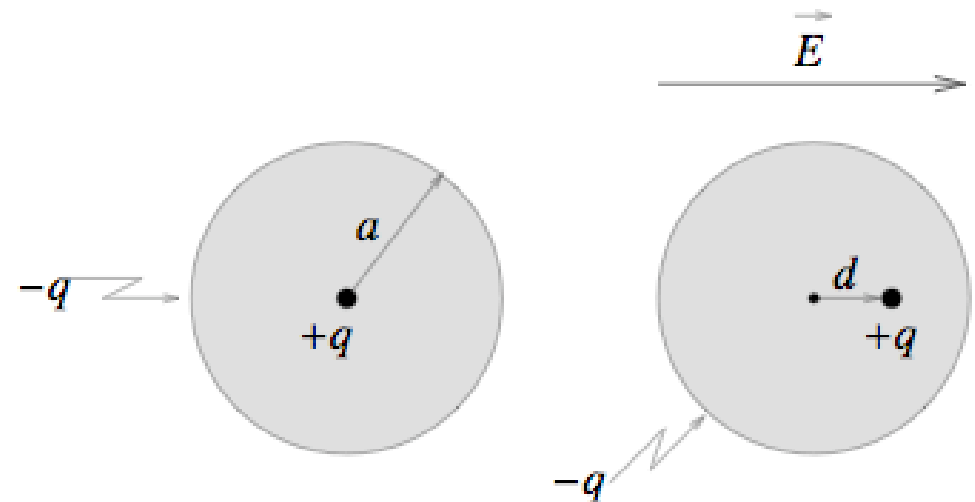
Que se passe-t-il quand un tel atome/molécule est exposé à un champ électrique extérieur?

4.1

Dipôles induits

Modèle primitif d'un atome:

- noyau ponctuel de charge positive
- entouré d'un "nuage" sphérique d'électrons, homogènement chargé
- champ électrique extérieur déplace l'un par rapport à l'autre, **polarisation atomique**



- déplacement minuscule, même à l'échelle atomique
- moments dipolaires des atomes s'additionnent
- champ extérieur comparable à la force de liaison atomique: **ionisation**

Moment dipolaire atomique donné par la **polarisabilité atomique** α :

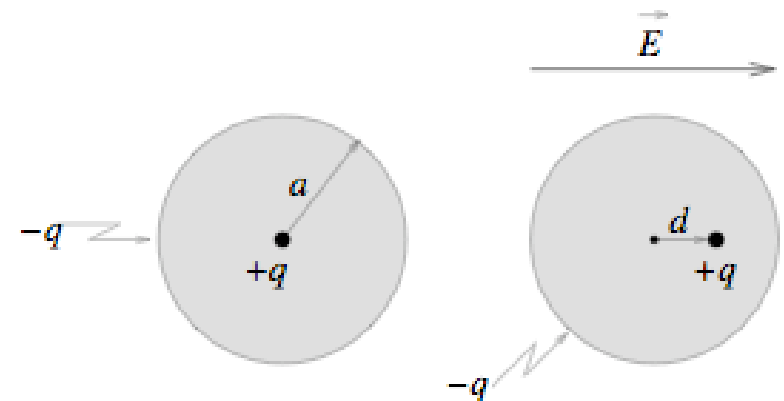
$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_{ext}$$

Dipôles atomiques induits

Calcul de la polarisabilité selon notre modèle naïf:

Force diôlaire intérieure compense force extérieure:

$$\begin{aligned}
 E_{int} &= -E_{ext} \\
 E_{int} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \int_0^d \rho \, d\tau \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \frac{-3q}{4\pi a^3} \frac{4}{3} \pi d^3 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{a^3}
 \end{aligned}$$



Polarisabilité proportionnelle au volume atomique:

$$E_{ext} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{a^3} \quad \rightarrow \quad p = qd = (4\pi\epsilon_0 a^3) E_{ext} \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3}$$

Polarisabilités atomiques α expérimentales pour quelques éléments:

Élément	H	He	Li	Be	C	Ne	Na	Ar	K	Cs
$\alpha/4\pi\epsilon_0$ [10^{-30}m^3]	0.667	0.205	24.3	5.60	1.76	0.396	24.1	1.64	43.4	59.

Handbook of Chemistry and Physics, CRC Press 1997

En accord qualitatif (à un facteur $\mathcal{O}(5)$ pres) avec notre modèle naïf.

Polarisation

- Atomes ou molécules non-polaires: moment dipolaire induit, parallèle au champ extérieur.
- Molécules polaires: moment de force aligne leur moment dipolaire parallèle au champ extérieur.
- Resultat dans les deux cas: **beaucoup de petits dipôles, alignés avec le champ.**
- L'agitation thermique en compétition, réduit l'alignement net, surtout à haute température.
- Pour certain matériaux l'effet, une fois induit par le champ extérieur, peut persister, surtout à basse température.
- **Polarisation** quantifie l'effet:

$$\vec{P} \equiv \text{densité du moment dipolaire}$$

Attention: ceci traite le moment dipolaire comme quantité continue.

- La polarisation du matériau cause elle-même un champ qui s'ajoute au champ extérieur.
- Nous étudions d'abord l'effet de ce nouveau champ additionnel, dû à P , et ensuite la cause de P .

Calculons le champ dû à la polarisation du milieu, décomposé en dipôles élémentaires:

- Potentiel du dipôle individuel:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\vec{r}} \cdot \vec{p}}{r^2}$$

avec le vecteur \vec{r} qui pointe du dipôle jusqu'au point d'observation \vec{r} .

- Dans le milieu nous avons un moment dipolaire $\vec{p} = \vec{P} d\tau'$ dans chaque élément du volume. Potentiel total:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\hat{\vec{r}} \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{r^2} d\tau'$$

Charges liées

- Avec $\vec{\nabla}'(1/r) = \hat{\vec{r}}/r^2$, le potentiel peut être reformulé comme l'action d'une **charge liée**:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\hat{\vec{r}} \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{r^2} d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{P} \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{r} \right) d\tau' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_V \vec{\nabla}' \left(\frac{\vec{P}}{r} \right) d\tau' - \int_V \frac{1}{r} (\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}) d\tau' \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{1}{r} \vec{P} \cdot d\vec{a}' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} (\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}) d\tau' \end{aligned}$$

- Le premier terme ressemble au potentiel d'une **charge de surface** $\sigma_b \equiv \vec{P} \cdot \hat{\vec{n}}$, le deuxième comme celui d'une **charge de volume** $\rho_b \equiv -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}$
- Potentiel de ces charges:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_b}{r} da' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_b}{r} d\tau'$$

- Le champ d'un objet polarisé est le même que celui causé par la charge surface σ_b et la charge volume ρ_b ensemble.

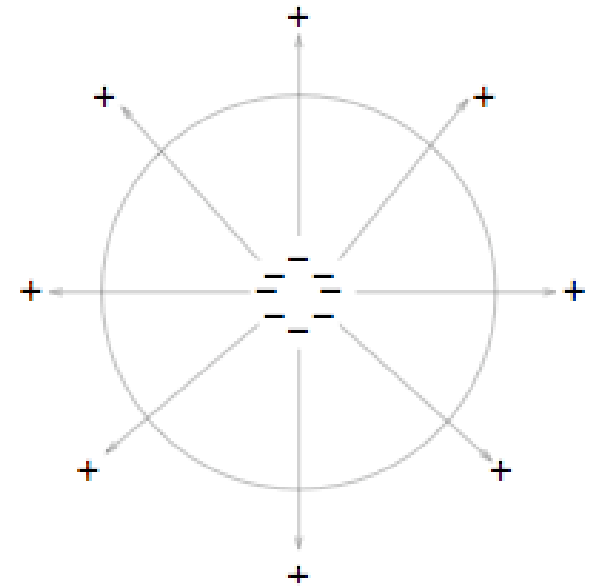
Modèle physique pour les charges liées

- Si la polarisation est inhomogène, charge est accumulée dans le volume aussi
- Conservation de la charge réclame que la charge accumulée dans un volume est égale et opposée à celle poussée à travers de sa surface:

$$\int_V \rho_b d\tau = - \int_S \vec{P} \cdot d\vec{a} = - \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) d\tau$$

- Ceci doit être vrai pour n'importe quel volume:

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$



4.3

Le déplacement électrique

Dans un milieu diélectrique:

- **charges liées**, dues à la polarisation, densité ρ_b ;
- **charges libres**, i.e. toute autre charge qui n'est pas produite par la polarisation du milieu, densité ρ_f .

Champ total selon la loi de Gauss:

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho_b + \rho_f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} + \rho_f \\ \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) &= \rho_f\end{aligned}$$

Déplacement électrique:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

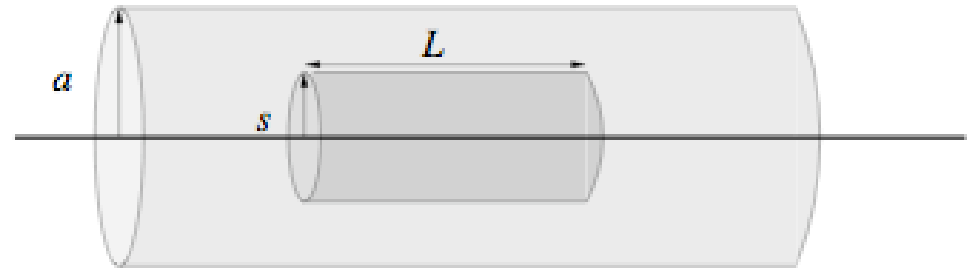
Loi de Gauss dans milieu pondéré:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \quad ; \quad \oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_f$$

Cette formule nous permet de travailler avec \vec{D} et uniquement les charges libres quand un diélectrique est présent. **Mais D n'est pas le champ électrique**

Exemple: Fil isolé

Un long fil droit chargé à une densité uniforme λ est entouré par une isolation cylindrique de rayon a . Trouver le déplacement électrique.



Loi de Gauss à une surface cylindrique de rayon s et de longueur L :

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_f$$
$$D(2\pi sL) = \lambda L$$
$$\vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi s} \hat{s}$$

Ce résultat est valable à la fois à l'intérieur et à l'extérieur du diélectrique. A l'extérieur, pour $s > a$ on a $\vec{P} = 0$:

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 s} \hat{s}$$

A l'intérieur nous ne pouvons déterminer \vec{E} que si \vec{P} est connu.

Attention: le déplacement n'est pas le champ électrique

Il ne faut pas confondre le déplacement avec le champ électrique à l'intérieur d'un diélectrique:

- Il n'y a pas d'analogie à la loi de Coulomb:

$$\vec{D}(\vec{r}) \neq \frac{1}{4\pi} \int \frac{\hat{r}}{r^2} \rho_f(\vec{r}') d\tau'$$

- La divergence ne détermine pas complètement un champ vectoriel, il faut le rotationnel aussi. Dans le cas électrostatique, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, mais

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \epsilon_0 (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + (\vec{\nabla} \times \vec{P}) = \vec{\nabla} \times \vec{P}$$

n'est pas forcément zéro.

- En particulier, si un système manque de symétrie sphérique, cylindrique ou planaire, on ne peut pas être sûr que $\vec{\nabla} \times \vec{P} = 0$, même dans une situation statique.

Conditions de (dis-)continuité

Les conditions aux interfaces des systèmes électrostatiques peuvent être reformulées pour le déplacement:

- Discontinuité de la composante perpendiculaire à une interface:

$$D_{dessus}^{\perp} - D_{dessous}^{\perp} = \sigma_f$$

- Discontinuité de la composante parallèle à une interface:

$$\vec{D}_{dessus}^{\parallel} - \vec{D}_{dessous}^{\parallel} = \vec{P}_{dessus}^{\parallel} - \vec{P}_{dessous}^{\parallel}$$

- En présence de diélectriques ces conditions sont parfois plus utiles que celles pour le champ électrique (qui restent évidemment inchangées).

$$\vec{E}_{dessus}^{\perp} - \vec{E}_{dessous}^{\perp} = \sigma_t$$

Continuité de la composante // du champ E à la surface

Etudions maintenant les causes de la polarisation, l'alignement des dipôles atomiques ou moléculaires par un champ:

- Rappelons que le moment dipolaire atomique ou moléculaire induit est proportionnel au champ externe, et que le degré d'alignement des molécules dipolaires l'est aussi.
- Il est donc logique que pour certains matériaux, la polarisation – i.e. la densité des moments dipolaires élémentaires – est, elle aussi, proportionnelle au champ:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

On appelle de tels matériaux des **diélectriques linéaires** et la constante χ_e **susceptibilité électrique**.

- Attention: en général, le terme $\propto E$ est juste la première approximation d'une série de termes. Les matériaux qui ont une **polarisation non-linéaire** sont un important sujet de recherche.

Diélectriques linéaires

- Le champ qui cause la polarisation est la somme de tous les champs électriques présents: le champ externe, celui causé par les charges libres **et le champ causé par la polarisation elle-même**. La formule est donc récursive!
- Ignorons d'abord cette récursion. Le déplacement électrique pour les matériaux linéaires est:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

avec la **permittivité électrique** $\epsilon \equiv \epsilon_0 (1 + \chi_e)$:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Diélectriques linéaires

- La permittivité relative d'un matériau est appelée sa **constante diélectrique**:

$$\epsilon_r \equiv 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

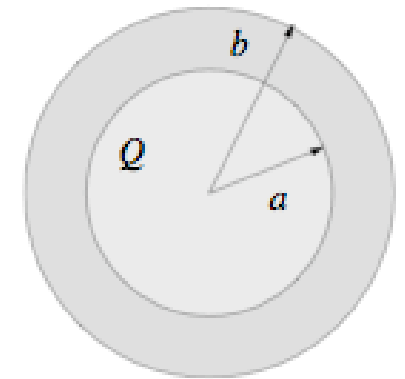
- Pour les diélectriques linéaires:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

Matériau	ϵ_R	Matériau	ϵ_r
Vide	1	Benzène	2.28
Hélium	1.000065	Diamand	5.7
Néon	1.00013	Sel	5.9
Hydrogène	1.00025	Silicium	11.8
Argon	1.00052	Méthanol	33.0
Air (sec)	1.00054	Eau	80.1
Azote	1.00055	Glace (-30 °C)	99
Vapeur (100 °C)	1.00587	KTaNbO ₃ (0 °C)	34'000

Exemple: Sphère isolée

Une sphère métallique de rayon a porte une charge Q . Elle est entourée jusqu'à un rayon b , par un diélectrique de permittivité ϵ . Trouver le potentiel au centre, relatif à l'infini.



Le système a une symétrie sphérique et nous connaissons la charge libre. Par conséquent nous commençons en calculant le déplacement:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_f$$
$$\vec{D} = \begin{cases} \vec{E} = \vec{P} = 0 & \text{pour } r < a \\ \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} & \text{pour } r > a \end{cases}$$
$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D} = \begin{cases} 0 & \text{pour } r < a \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \hat{r} & \text{pour } a < r < b \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{pour } r > b \end{cases}$$

Déplacement \simeq champ pour diélectriques linéaires?

On pourrait croire que $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ et $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ dans un diélectrique linéaire deviennent “comme le champ électrique”.

Ceci n'est vrai que dans le cas spécial d'un milieu diélectrique homogène et infini:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{D} = 0$$

Le déplacement est trouvé à partir de la charge libre uniquement:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_{vac}$$

où \vec{E}_{vac} est le champ que la distribution de charges libres produirait si le diélectrique n'était pas là. Le champ électrique dans le milieu est:

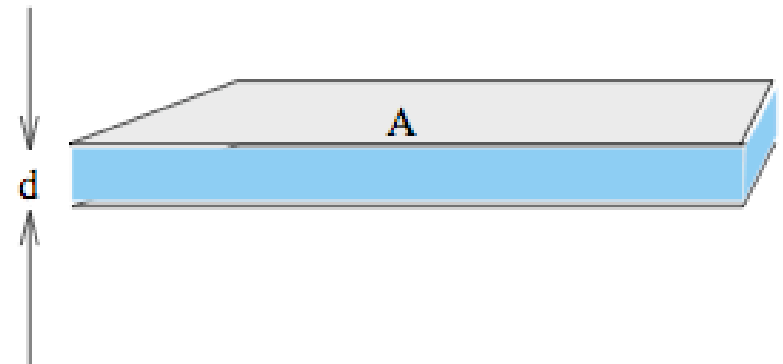
$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D} = \frac{1}{\epsilon_r} \vec{E}_{vac}$$

simplement réduit par un facteur ϵ_r . Par exemple, une charge ponctuelle dans un diélectrique linéaire, homogène et infini aura un champ:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r}$$

Exemple: Condensateur avec diélectrique

Un condensateur à plans parallèles est rempli par un matériau avec une constante diélectrique ϵ_r . Quelle est sa capacitance?



Solution:

Pour un condensateur suffisamment grand, le champ est complètement confiné à l'intérieur du diélectrique. La charge sur les plans reste la même, mais le diélectrique réduit le champ et la différence de potentiel par un facteur $1/\epsilon_r$. La capacité est par conséquent augmentée:

$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon_r C_{vac} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Conditions de (dis-)continuité aux interfaces

- Dans un diélectrique linéaire et homogène, les densité des charges liées et libres sont proportionnelles:

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\chi_e}{\epsilon} \vec{D} \right) = - \left(\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \right) \rho_f$$

- En particulier, si aucune charge libre est incluse dans le milieu, $\rho = 0$ et la charge nette doit résider sur la surface. A l'intérieur d'un tel milieu, l'équation de Laplace règne.
- A l'interface entre deux milieux on avait trouvé:

$$\begin{aligned} D_{dessus}^{\perp} - D_{dessous}^{\perp} &= \sigma_f \\ \epsilon_{dessus} E_{dessus}^{\perp} - \epsilon_{dessous} E_{dessous}^{\perp} &= \sigma_f \end{aligned}$$

- Pour le potentiel ceci veut dire:

$$\epsilon_{dessus} \frac{\partial V_{dessus}}{\partial n} - \epsilon_{dessous} \frac{\partial V_{dessous}}{\partial n} = -\sigma_f$$

bien que le potentiel lui-même est continu, $V_{dessus} = V_{dessous}$.

L'énergie dans les systèmes diélectriques

Le travail nécessaire pour charger un condensateur est

$$W = \frac{1}{2}CV^2$$

Si le condensateur est rempli avec un diélectrique linéaire, sa capacité augmente par un facteur ϵ_r :

$$C = \epsilon_r C_{vac}$$

Par conséquent, le chargement d'un tel condensateur réclame plus de travail. La raison est que l'on doit pomper plus de charge pour arriver à la même différence en potentiel, parce que le champ de ces charges est partiellement compensé par celui des charges liées.

Avant nous avons trouvé une formule générale pour l'énergie stockée dans un système électrostatique:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

L'énergie dans les systèmes diélectriques

Le cas d'un condensateur rempli par un diélectrique suggère que la constante diélectrique devrait intervenir:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int \epsilon_r E^2 d\tau = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau$$

Pour prouver cette relation, supposons que la position du diélectrique est fixe et que la charge libre est apportée petit à petit. Quand ρ_f augmente par une portion $\Delta\rho_f$, la polarisation change et la distribution de la charge liée aussi. Mais nous sommes uniquement intéressés par le travail effectué sur les charges libres:

$$\Delta W = \int V \Delta\rho_f d\tau$$

Avec $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f$ on a $\Delta\rho_f = \vec{\nabla} \cdot (\Delta\vec{D})$, où $\Delta\vec{D}$ est le changement induit par l'incrément de charge libre:

$$\Delta W = \int [\vec{\nabla} \cdot (\Delta\vec{D})] V d\tau$$

L'énergie dans les systèmes diélectriques

$$\Delta W = \int [\vec{\nabla}(\Delta\vec{D})] V d\tau$$

L'intégrand est contenu dans $\vec{\nabla}[(\Delta\vec{D})V] = [\vec{\nabla}(\Delta\vec{D})]V + \Delta\vec{D} \cdot (\vec{\nabla}V)$:

$$\Delta W = \int \vec{\nabla} [(\Delta\vec{D})V] d\tau + \int (\Delta\vec{D}) \cdot \vec{E} d\tau$$

Le premier terme se convertit dans une intégrale de surface qui disparaît si l'intégrale porte sur tout l'espace. Le travail est par conséquent, pour n'importe quel milieu:

$$\Delta W = \int (\Delta\vec{D}) \cdot \vec{E} d\tau$$

Si le matériau est un diélectrique linéaire, on a $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, et pour incréments infinitésimaux:

$$\frac{1}{2}\Delta(\vec{D} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2}\Delta(\epsilon E^2) = \epsilon(\Delta\vec{E}) \cdot \vec{E} = (\Delta\vec{D}) \cdot \vec{E}$$

Le travail infinitésimal et le travail total sont donc:

$$\Delta W = \Delta \left(\frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau \right)$$

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau$$

L'énergie dans les systèmes diélectriques

En présence de diélectriques linéaires:

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau$$

On doit se demander pourquoi la réponse pourtant générale

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

ne s'applique pas à notre problème. La réponse est que l'on peut choisir d'inclure ou non l'énergie stockée dans les dipôles du diélectrique:

$$W_{tot} = W_f + W_b + W_{pol}$$

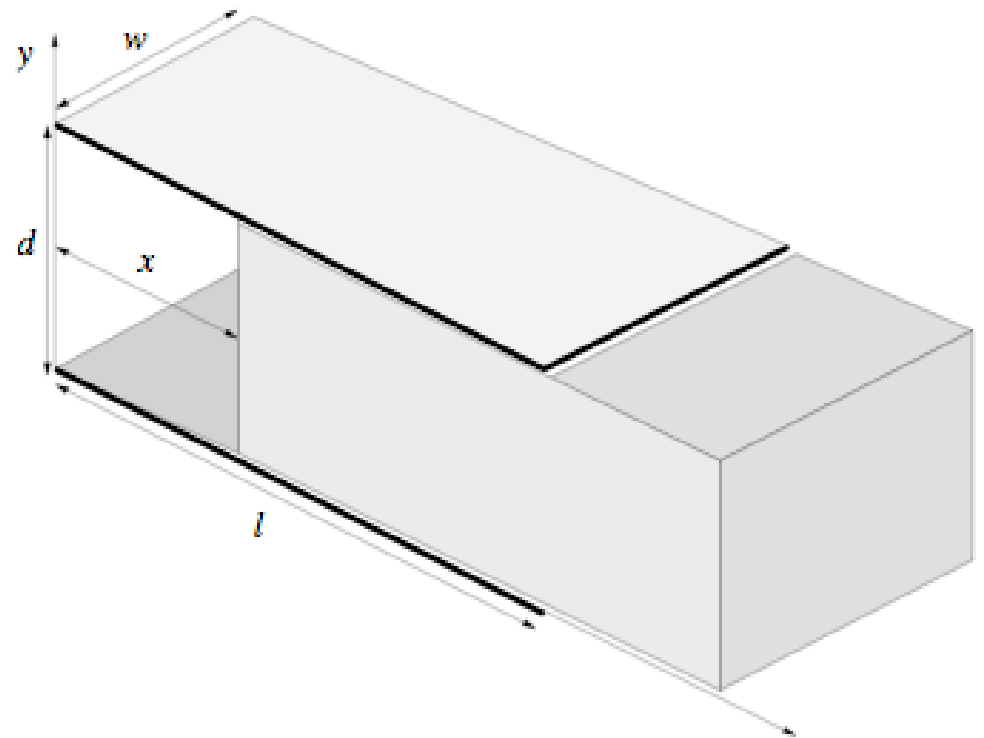
- Si l'on compte le travail pour installer les charges libres et les charges liées, chacune à sa place, on trouve en effet $W = \epsilon_0/2 \int E^2 d\tau$. Mais ceci ne tient pas compte du travail nécessaire pour polariser le matériau.
- Si, comme nous avons fait plus haut, on compte le travail pour installer uniquement les charges libres, et que l'on laisse le milieu se polariser à sa guise après chaque apport de nouvelle charge libre, on inclut implicitement l'énergie stockée dans la polarisation du milieu. Le travail est donc plus grand et on trouve $W = 1/2 \int \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau$.

Forces sur un diélectrique

Comme un conducteur est attiré dans un champ électrique externe, une force agit sur un diélectrique. Les charges liées sont attirés vers les charges libres de signe opposé.

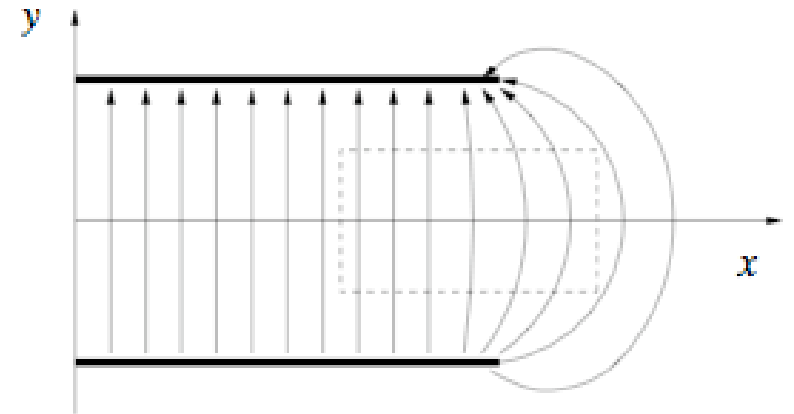
Le calcul de ces forces peut être difficile, parce que les champs aux bords ne peuvent en général pas être négligés.

On avait prétendu que le champ dans un condensateur à plans parallèles est constant à l'intérieur et zéro à l'extérieur. Dans ce cas, la force sur le diélectrique serait zéro aussi, parce que le champ serait normal aux plans partout.



Forces sur un diélectrique

Mais le champ doit s'étendre au delà du condensateur, sinon $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$. Ce champ des bords attire le diélectrique entre les plans du condensateur.



Le calcul du champ aux bords est complexe, mais on peut l'éviter en utilisant un raisonnement basé sur l'énergie du système. Si W est l'énergie du système, un déplacement infinitésimal dx correspond à un travail:

$$dW = F_{mec} dx = -F dx$$

où F_{mec} est la force agissant contre la force électrostatique F qui attire le diélectrique, $F_{mec} = -F$.

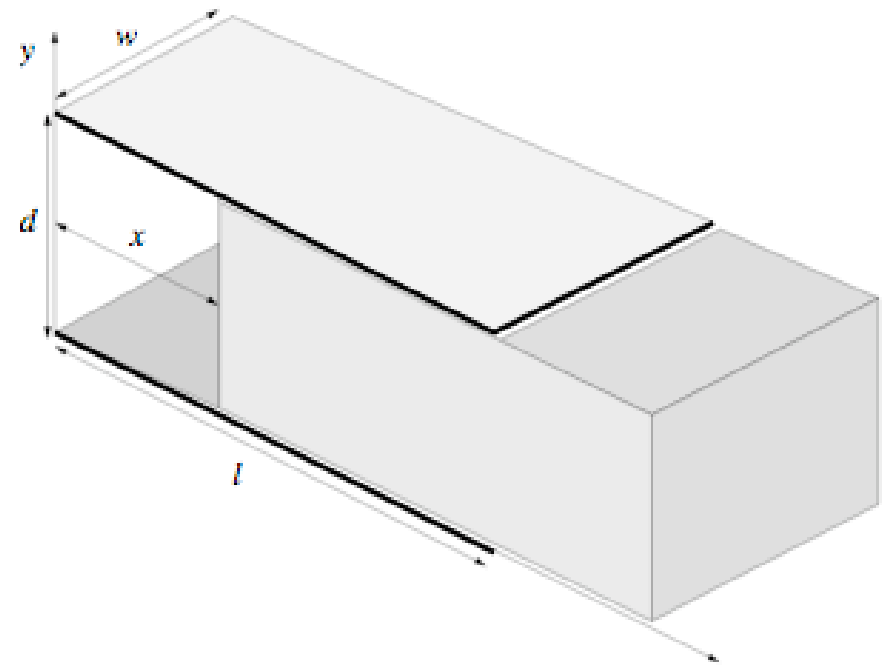
Forces sur un diélectrique

La force électrostatique est par conséquent:

$$\begin{aligned} F &= -\frac{dW}{dx} \\ &= -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} CV^2 \right) \end{aligned}$$

La capacité est:

$$C = \frac{\epsilon_0 w}{d} (\epsilon_r l - \chi_e x)$$



La charge totale, $Q = CV$, ne change pas quand le diélectrique est déplacé:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \\ F &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC}{dx} = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx} = -\frac{\epsilon_0 \chi_e w}{2d} V^2 \end{aligned}$$

La force est négative, le diélectrique est attiré dans le condensateur.

Forces sur un diélectrique

Attention:

On a supposé que la charge ne change pas quand on tire sur le diélectrique. On peut aussi connecter les deux plans à une batterie et tenir le potentiel constant. Dans ce cas il faut inclure le travail fourni par la batterie:

$$dW = F_{mec} dx + V dQ \quad \rightarrow \quad F = -\frac{dW}{dx} + V \frac{dQ}{dx}$$

Maintenant la charge change, mais le potentiel est constant:

$$F = -\frac{1}{2}V^2 \frac{dC}{dx} + V^2 \frac{dC}{dx} = \frac{1}{2}V^2 \frac{dC}{dx} = -\frac{\epsilon_0 \chi_e w}{2d} V^2$$

Le résultat est donc indépendant de cette condition, il est entièrement déterminé par la disposition des charges libres et liées.