Chapître 7: Electrodynamique

7.0 loi d’Ohm
7.1 force électromotrice
7.2 induction
7.3 Équations de Maxwell dans le vide

7.0 La loi d'Ohm

Pour faire circuler un courant, une force doit être appliquée pour faire bouger les charges. Pour la plupart des matériaux, la vitesse des charges, et par conséquent la densité de courant sera proportionelle à force $\vec{f}$ par unité de charge:

$$\vec{J} = \sigma \vec{f}$$

avec la conductivité σ. Son inverse est la résistivité $\rho = 1/\sigma$. Il ne faut pas confondre ces deux quantités avec les densités de charge volumique et superficielle malheureusement notées avec les mêmes symboles.

Conducteurs	Résistivité $[\Omega\text{m}]$	Semicond./Isolateurs	Résistivité $[\Omega\text{m}]$
Argent	1.59×10^{-8}	Eau de mer	4.4×10^{-2}
Cuivre	1.68×10^{-8}	Germanium	4.6×10^{-1}
Or	2.21×10^{-8}	Diamant	2.7
Aluminium	2.65×10^{-8}	Silicium	2.5×10^{3}
Fer	9.61×10^{-8}		
Mercure	9.58×10^{-7}	Eau pure	2.5×10^{5}
Nickel/Chrome	1.00×10^{-6}	Bois	$10^{8} - 10^{11}$
Manganèse	1.44×10^{-6}	Verre	$10^{10} - 10^{14}$

Handbook of Chemistry and Physics, CRC Press 1997

La loi d'Ohm

Les métaux sont excellents conducteurs, une minuscule force suffit pour faire circuler un courant. Cette force peut en principe être de n'importe quel nature. Pour ce cours, on considère la force électromagnétique:

$$\vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

On verra que la vitesse des charges est relativement petite, et sauf s'il y a des importants champs magnétiques externes, la densité de courant suit la loi d'Ohm:

$$\boxed{\vec{J} = \sigma\vec{E}}$$

Dans la discussion de l'électrostatique on avait constaté, que le champ électrique était zéro partout dans un conducteur, par conséquent $\vec{J} = 0$. Ici, dans le cas non-statique, ce n'est pas le cas, parce qu'on permet à un flux de charges de s'établir, et on maintient le champ électrique par l'extérieur. Pour un conducteur idéal tout de même, $\sigma \to \infty$ et le champ à l'intérieur du conducteur est négligeable même si un courant passe. Pour cette raison on traite souvent les conducteurs qui amènent un courant, par exemple dans un circuit électrique, comme des équipotentiels. Les résistances, par contre, sont fabriquées avec un matériau de faible conductivité.

La loi d'Ohm

Cet exemple suggère que le courant d'une électrode à l'autre sera normalement proportionnel à la différence de potentiel entre eux:

$$V = IR$$

Ceci est une forme plus familière de la loi d'Ohm, avec la résistance R comme constante de proportionalité. Le résistance dépend de la géométrie et des propriétés du matériau. Elle est mesurée en Ohm:

$$[R] = \Omega = \frac{\mathsf{V}}{\mathsf{A}}$$

Cette formule résulte directement de $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, et hérite de la condition que tout effet magnétique doit être négligeable.

Pour courants continus et conductivité uniforme, on a:

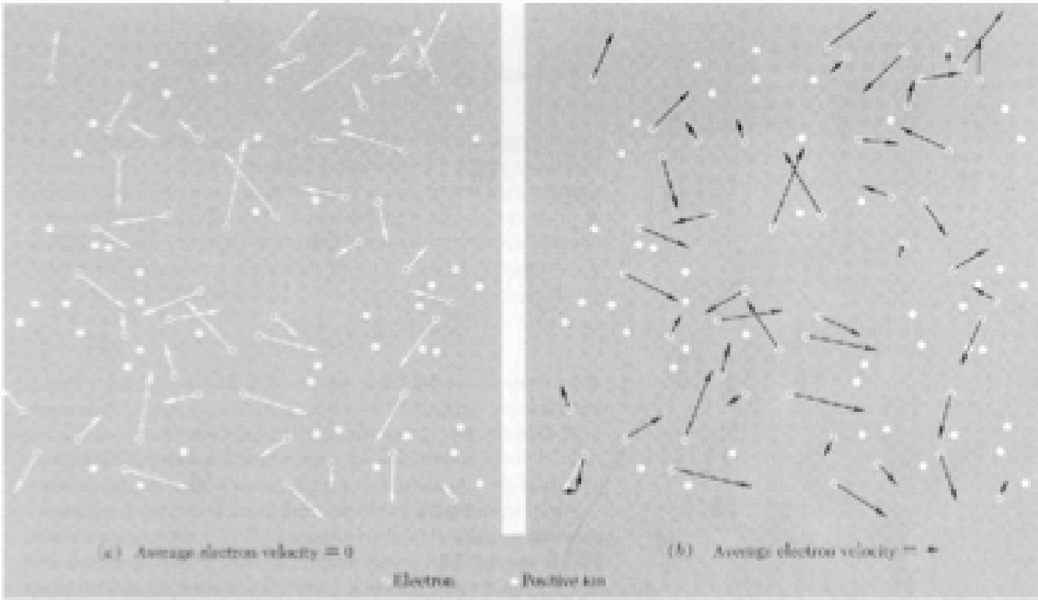
$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\sigma}\vec{\nabla}\vec{J} = 0$$

et $\partial\rho/\partial t = 0$, ce qui veut dire que $\rho = \rho(t = 0) = 0$. Toute charge résiduelle doit résider sur les surfaces, et la loi de Laplace règne à l'intérieur d'un matériau ohmique homogène.

La loi d'Ohm: Pourquoi marche-t-elle?

Que la densité de courant soit proportionelle au champ électrique, et le courant au potentiel, est étonnant. Pour des particules chargées libres, ceci n'est pas le cas: si le champ est constant, leur vitesse aumente constamment. La densité de courant $\rho\vec{v}$ n'est donc pas du tout constante.

Mais l'intérieur d'un conducteur ressemble plutôt à un gaz dense et chaud d'électrons dans un champ extérieur. Les électrons sont en mouvement thermique, avec une vitesse v_t qui dépend de la température et qui excède largement la vitesse moyenne v_d, induite par le champ électrique.



Purcell, Fig. 4.5, p. 123

Après une certaine distance moyenne λ, ils interagissent avec les ions positifs du métal et sont freinés. Ceci laisse un temps moyen de $t = \lambda/v_t$ entre deux collisions. Pendant ce temps, les électrons sont accélérés par le champ électrique à une vitesse de dérive moyenne:

$$v_d = \frac{at}{2} = \frac{qEt}{2m} = \frac{q\lambda}{2m}\frac{E}{v_t}$$

La loi d'Ohm: Pourquoi marche-t-elle?

Comme pour les gouttes de pluie dans l'atmosphère, les forces dissipatives causent une vitesse constante. Avec une densité ρ d'électrons mobiles, la densité de courant dans ce modèle est

$$\vec{J} = \rho q \vec{v}_d \propto \frac{\vec{E}}{v_t}$$

Ce modèle est certes naïf mais il prédit correctement la loi d'Ohm et le fait que normalement la conductivité diminue avec une température qui augmente. Ceci est dû au fait qu'une plus grande température augmente v_t et diminue le temps entre collisions.

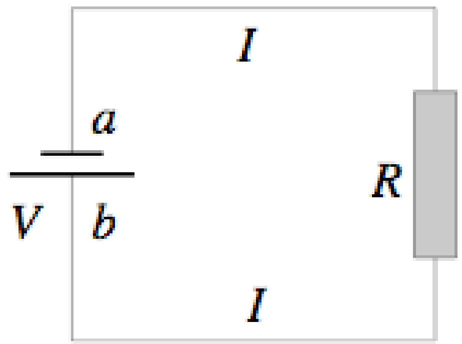
Un résultat de toutes ces collisions est qu'une partie de l'énergie électrique est convertie en chaleur. Le travail par unité de charge est V et la charge par unité de temps est I, par conséquent la puissance délivrée est:

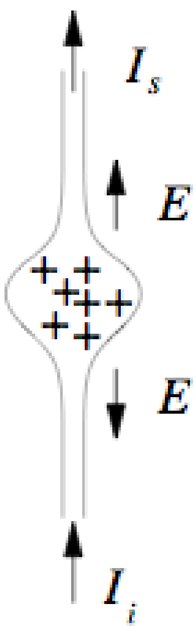
$$\boxed{P = VI = I^2 R = \frac{V^2}{R}}$$

Cette loi s'appele la loi de Joule. L'unité de cette puissance est $[P] =$ Watt si l'on met I en Ampères (ou V en Volts) et R en Ohms.

7.1 La force électromotrice

Dans un circuit électrique le courant est le même partout, parce qu'aucun élément ne peut stocker ni livrer des charges. Ceci veut dire que tous les charges dans les divers conducteurs et résistances sont en mouvement continu et pratiquement synchronisé.





Le flux des charges est lissé par la force électrostatique due à la densité des charges mobiles: si les charges s'accumulent à un endroit, leur champ retarde le flux des suivantes et accélère celui des charges en avance. Il en suit que deux forces (par unité de charge) agissent:

$$\vec{f} = \vec{f}_s + \vec{E}$$

la force fournie par la source, $\vec{f}_s$, et l'électrostatique, $\vec{E}$.

La force électromotrice

La source du courant peut être de nature très diverse. Exemples:

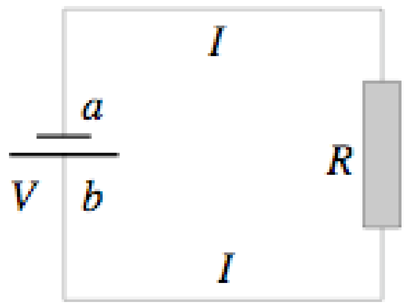
– la force chimique à l'intérieur d'une batterie,
– la pression mécanique sur un crystal piézoélectrique,
– la différence de température qui agit sur un thermocouple,
– la lumière qui touche une cellule photoélectrique etc.

L'effet moteur de la source est exprimé par l'intégrale autour du circuit:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{f}\, d\vec{l} = \oint (\vec{f}_s + \vec{E})\, d\vec{l} = \oint \vec{f}_s\, d\vec{l}$$

$\mathcal{E}$ est appelée la force électromotrice (fem), mais sa dimension est celle d'un travail par unité de charge et non pas d'une force.

Dans une source de courant idéale, sans résistance interne, la force nette sur les charges est zéro, c'est à dire $\vec{E} = -\vec{f}_s$. La différence de potentiel entre les deux pôles a et b est par conséquent:

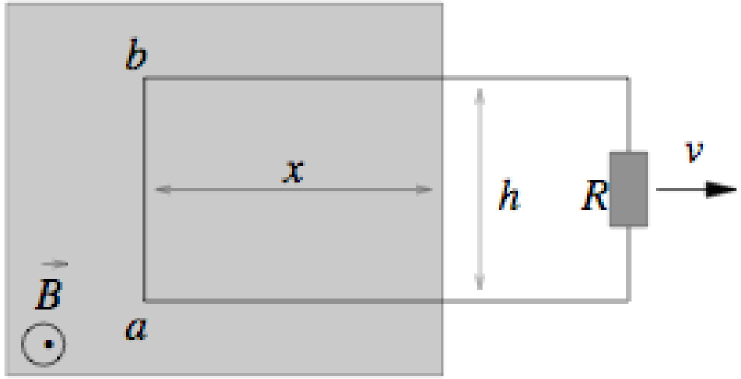


$$V = -\int_a^b \vec{E}\, d\vec{l} = \int_a^b \vec{f}_s\, d\vec{l} = \oint \vec{f}_s\, d\vec{l} = \mathcal{E}$$

Le rôle de la batterie est de maintenir la différence de potentiel et de fournir ainsi la fem. Le champ électrique résultant pousse les charges autour du circuit.

Le mouvement comme source de fem

Le mouvement mécanique est la source de fem par excellence. Dans les générateurs l'énergie mécanique est exploitée en poussant un fil à travers d'un champ magnétique, qui est normal à la direction du fil.



Pour une spire rectangulaire, qui est déplacée vers la droite avec une vitesse v, les charges mobiles dans le segment $a-b$ sentent une force magnétique verticale, $f_m = qvB$. Cette force génère un courant dans la sens de l'aiguille d'une montre. La fem est:

$$\boxed{\mathcal{E} = \oint \vec{f}_m \, d\vec{l} = vhB}$$

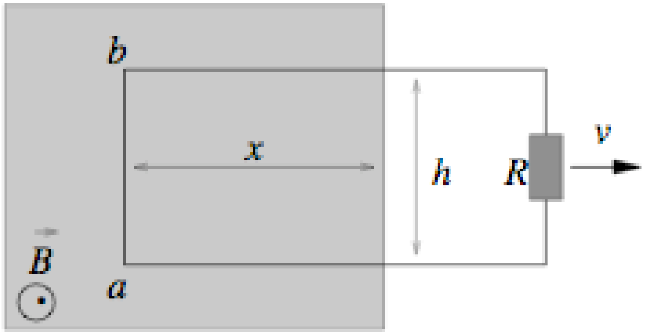
Les segments horizontaux ne contribuent pas, parce que la force est normale au fil.

Notez que l'intégrale autour du circuit est effectuée à un instant précis du temps, $t =$ const. Ceci veut dire que $d\vec{l}$ est vertical bien que la spire soit en train de passer à droite. Par conséquent, ce n'est pas le champ magnétique qui fournit le travail pour pousser les charges, mais la force qui tire sur la spire

Le mouvement comme source de fem

Il y a une manière particulièrement élegante d'exprimer la fem dans une spire en mouvement. Le flux magnétique Φ qui traverse la spire est:

$$\Phi = \int \vec{B}\, d\vec{a}$$



Pour la spire rectangulaire le flux est

$$\Phi = Bhx$$

En déplacant la spire vers la droite ($dx/dt < 0$), le flux diminue:

$$\frac{d\Phi}{dt} = Bh\frac{dx}{dt} = -Bhv \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

Ceci est connu comme la règle du flux, et peut être appliqué à des spires de n'importe quelle forme. En effet la spire n'a même pas besoin de maintenir sa forme.

Comme d'habitude, le signe de la fem, comme celui du flux, est donné par la règle de la main droite. Le sens du courant définit la direction de $d\vec{a}$, le reste en suit.

7.2

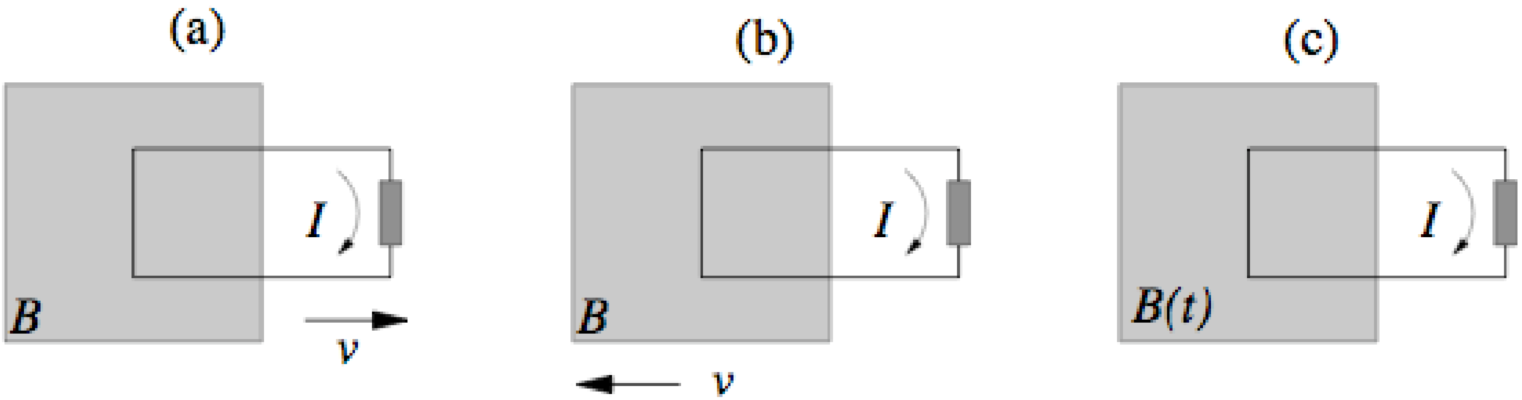
Induction

En 1831 Michael Faraday rapportait une série d'expérience, dont trois types peuvent être distingées:

(a) Une spire est tirée à travers un champ magnétique. Un courant passe par le circuit.

(b) La spire reste immobile, mais le champ est déplacé en tirant sur l'aimant. Le même courant en résulte.

(c) Spire et aimant restent immobiles, mais la magnitude du champ est variée. Encore une fois un courant passe.



Pour les deux premiers cas, l'explication est claire: le mouvement fait changer le flux magnétique inclus dans la spire, et induit ainsi une fem $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$. Pour ceci seul le mouvement relatif compte.

La loi de Faraday

Sans mouvement de spire ou aimant, il n'y a pas de force de Lorentz sur les charges mobiles du conducteur. La force qui fait passer le courant doit par conséquent être de nature électrique. Faraday proposait alors qu' un champ magnétique variable induit un champ électrique. En effet l'expérience quantitative trouve qu'encore une fois la fem est entièrement donnée par le changement du flux:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{a}$$

Par conséquent l'expérience trouve la loi de Faraday, sous sa forme intégrale et différentielle:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{a} \quad ; \quad \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Elle complète la loi électro- et magnétostatique $\oint \vec{E}\, d\vec{l} = 0$ en admettant des champs magnétiques variables. Elle crée des champs électriques rotationels.

La façon dont le flux change n'est pas importante, seule la vitesse du changement importe. La fem est toujours donné par $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$.

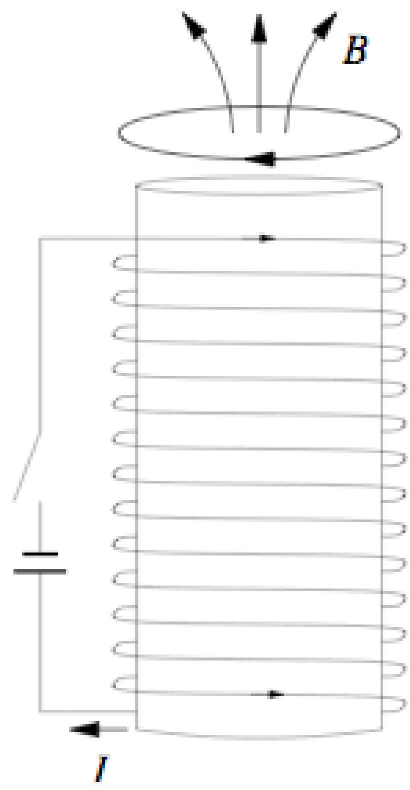
La règle de Lenz: l'anneau qui saute

Dans le cas du champ magnétique variable, la direction du champ peut poser problème. La règle de Lenz peut aider à la déterminer: la nature s'oppose au changement du flux magnétique. Selon cette règle, le courant induit essaye de réduire le changement de flux par son propre flux magnétique.

Exemple:

Soit un anneau métallique coaxial avec un solénoïde débranché. Quand on branche le courant du solénoïde, l'anneau saute violemment dans la direction du champ.

Avant de brancher le courant dans le solénoïde, le flux qui passe par l'anneau est zéro. Après qu'un flux vers le haut apparaisse, sa fem induit un courant de direction opposée à celle du courant dans l'aimant. Les deux courants opposés se repoussent et l'anneau saute.



Le champ électrique induit

Il y a donc deux manières de générer un champ électrique:

– par une distribution de charge selon la loi de Gauss:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

– par un champ magnétique variable, selon la loi de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

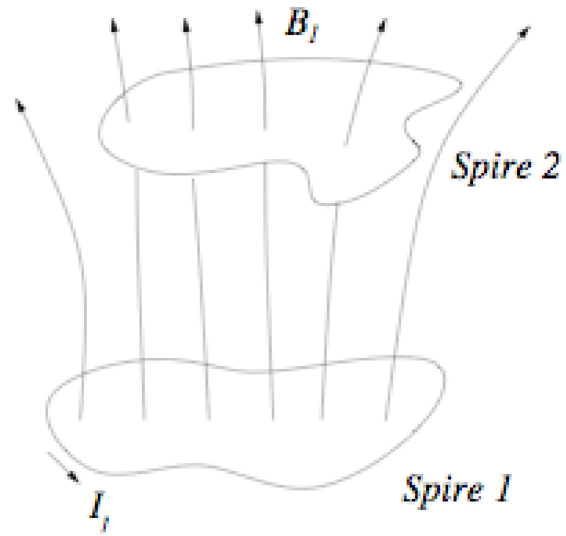
En absense de toute charge, les équations de Maxwell deviennent en effet complètement symétriques:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$
$$\vec{\nabla}\vec{E} = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

Les champs électriques induits par $-\partial \vec{B}/\partial t$ ont par conséquent les mêmes propriétés que les champ magnétiques causés par une densité de courant $\mu_0 \vec{J}$.

Inductance mutuelle

Supposons deux spires au repos. Si un courant continu I_1 passe par la spire no. 1, un champ magnétique $\vec{B}_1$ est produit. Une partie de ses lignes de champ passent par la spire no. 2, notons leur flux par Φ_2.



Le champ $\vec{B}_1$ peut être difficile à calculer, mais il est certainement proportionel à I_1 à cause de Biot-Savart:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int \frac{d\vec{l}_1 \times \hat{\vec{\mathrm{r}}}}{\mathrm{r}^2}$$

Par conséquent, le flux de $\vec{B}_1$ par la spire no. 2 l'est aussi:

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \, d\vec{a}_2 = M_{21} I_1$$

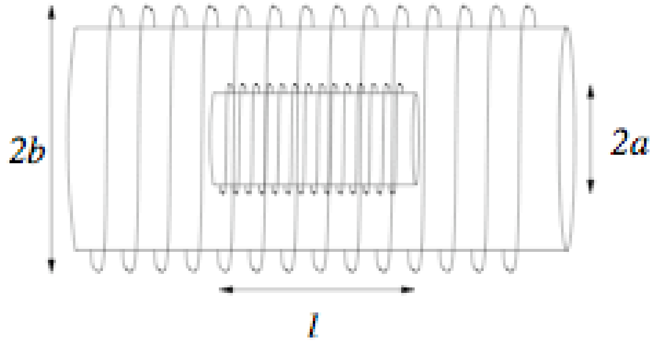
La constante M_{21} s'appelle l'inductance mutuelle des deux spires.

Exemple: inductance mutuelle de deux solénoïdes

Le champ du long solénoïde est:

$$B = \mu_0 n_2 I$$

Le flux qui passe par une seule boucle du solénoïde court est:



$$\Phi_i = B\pi a^2 = \mu_0 n_2 I \pi a^2$$

Le solénoïde court a un total de $n_1 l$ boucles et le flux total est:

$$\Phi = \mu_0 n_1 n_2 \pi a^2 l I$$

Ceci est aussi le flux causé par le dispositif inverse: si l'on passe le courant par le court solénoïde, le flux qui passe par le long est le même.

L'inductance mutuelle des deux solénoïdes est:

$$M = \mu_0 \pi a^2 n_1 n_2 l$$

et ne contient que des caractéristiques géométriques.

Inductance ou self

Si maintenant on fait varier le courant dans une des deux spires ou bobines, le flux à travers l'autre variera aussi et une fem y sera induite:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}$$

Le changement du courant dans une bobine entrainera un courant dans l'autre.

En effet, le courant dans la boucle no. 1 non seulement introduit un flux dans la boucle no. 2, mais aussi dans la boucle no. 1 elle-même! Et champ et flux sont encore une fois proportionels au courant:

$$\boxed{\Phi = LI}$$

La constante de proportionalité, L est l'inductance, ou self, de la boucle. Comme l'inductance mutuelle, elle dépend uniquement de taille et forme de la boucle. Si le courant change, la fem induit dans la boucle elle-même est

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$$

L'inductance est mesurée en Henry: $[L] = \mathrm{H} = \mathrm{Vs/A}$.

7.4 Le problème de la loi d'Ampère

Situation avant Maxwell:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad \text{(loi de Gauss)} \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{(loi de Faraday)} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \text{(loi d'Ampère)}$$

L'ensemble des équations électromagnétiques avant Maxwell était inconsistant. En particulier, il n'assure pas que la divergence des rotationels est zéro partout:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\vec{B}\right) = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = \mu_0\left(\vec{\nabla}\vec{J}\right)$$

Pour le champ électrique, tout va bien: comme $\vec{\nabla}\vec{B} = 0$, la divergence de son rotationel est zéro partout. Mais la divergence du rotationel pour le champ magnétique est zéro uniquement si ce dernier est généré par des courants continus, qui ont $\vec{\nabla}\vec{J} = 0$. Mais en général, la conservation de la charge éléctrique réclame uniquement la continuité:

$$\vec{\nabla}\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Quand un circuit inclut des éléments qui permettent de stocker des charges, la loi d'Ampère est en difficulté grave.

Completer la loi d'Ampère

Pour complèter la loi d'Ampère, il nous faut un terme additionnel qui assure que $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$ sous n'importe quelle condition. La loi de continuité, qui découle de la conservation de la charge électrique, nous indique le chemin. Le terme fautif est

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = \mu_0 \left(\vec{\nabla}\vec{J}\right)$$

$$\vec{\nabla}\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0 \vec{\nabla}\vec{E}\right) = -\vec{\nabla}\left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Par conséquent, la consistence réclame un champ $\vec{B}$ construit à partir d'un rotationel:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Un champ électrique variable induit un champ magnétique. L'expérience confirme cette conclusion.

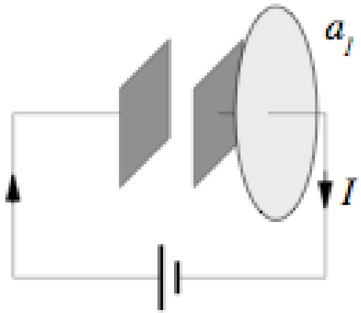
Maxwell lui-même a introduit le terme courant de déplacement:

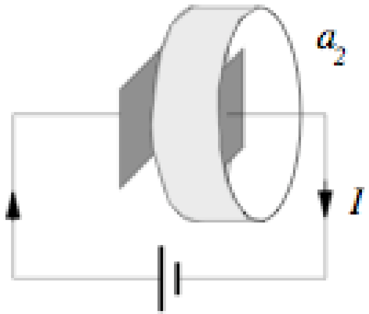
$$\vec{J}_d \equiv \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

mais en réalité cette grandeur ne correspond à aucun courant.

Exemple: chargement d'un condensateur

Le terme additionnel résout notre problème d'inconsistance dans le circuit avec condensateur. Dans la limite d'une faible distance entre les plaques, le champ à l'intérieur du condensateur est





$$E = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Q}{a}$$
$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 a}\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0 a} I$$

où a est la surface des plaques.

La loi d'Ampère complétée donne:

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I_{inc} + \mu_0 \epsilon_0 \int \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) d\vec{a}$$

Appliquée à la surface a_1, $E = 0$ et $I_{inc} = I$. Si l'on utilise par contre la surface cylindrique a_2, on a $I_{inc} = 0$ et $\int (\partial \vec{E}/\partial t)\, d\vec{a} = I/\epsilon_0$. La somme des deux termes est toujours la même.

Les équations de Maxwell dans le vide

Enfin complètes:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\vec{E} &= \tfrac{1}{\epsilon_0}\rho && \text{(loi de Gauss)}\\
\vec{\nabla}\vec{B} &= 0 &&\\
\vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\tfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} && \text{(loi de Faraday)}\\
\vec{\nabla}\times\vec{B} &= \mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\tfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} && \text{(loi d'Ampère + complément de Maxwell)}
\end{aligned}$$

Le complément de Maxwell laisse le potentiel vecteur magnétique inchangé par rapport à la magnétostatique:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

Par contre, la relation entre les potentiels et le champ électrique est modifiée par la loi de Faraday. En termes de $\vec{A}$, celle-ci devient:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Voici alors une quantité sans rotationnel que l'on peut l'écrire comme le gradient d'un potentiel scalaire:

$$\left(\vec{E}+\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = -\vec{\nabla}V \quad \rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$