

Université de Sherbrooke - Département de physique
 PHY 754 - Physique Mésoscopique
 Examen écrit du Lundi 21 Février 2005
 Durée: 2 heures

Professeure: Karyn Le Hur

Question 1: (12 points); temps suggéré = 50 minutes
Du problème de deux barrières vers la loi d'Ohm

Considérons le problème de deux barrières de potentiel séparées d'une distance d . Les amplitudes de transmission et de réflexion à travers chaque barrière sont dénotées t_i et r_i avec $i = 1, 2$. Les probabilités de transmission et de réflexion associées sont $T_i = |t_i|^2$ et $R_i = |r_i|^2$. On introduira la phase $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}d$ accumulée par la fonction d'onde d'un électron pour aller de la barrière 1 à la barrière 2; λ est la longueur d'onde électronique. La phase accumulée pour faire un tour entre les deux barrières vaut donc $\theta = 2\varphi$.

- a) En sommant sur toutes les amplitudes des processus contribuant à la transmission, évaluer l'amplitude t de transmission totale à travers la double barrière?
- b) En déduire que la probabilité $T = |t|^2$ de transmission à travers la double barrière prend la forme:

$$T = \frac{T_1 T_2}{1 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos(2\varphi) + R_1 R_2}. \quad (1)$$

Après moyennage sur la phase φ on obtient:

$$\langle T \rangle_\varphi = \langle T \rangle = \frac{T_1 T_2}{1 - R_1 R_2}. \quad (2)$$

- c) Expliquer brièvement pourquoi on peut définir une résistance "semi-classique" obtenue après moyennage sur la phase φ (ici normalisée à $h/(2e^2)$) comme:

$$\mathcal{R} = \frac{1 - \langle T \rangle}{\langle T \rangle}. \quad (3)$$

d) En déduire que pour N barrières **identiques** en série, on obtient:

$$\langle T(N) \rangle = \frac{T_1}{N(1 - T_1) + T_1}. \quad (4)$$

e) En utilisant la relation $N = L/l_e$ où L est la taille de l'échantillon et l_e le libre parcours moyen soit la distance moyenne entre deux barrières, pour $N \gg 1$ retrouver la loi d'Ohm à une dimension.

f) Expliquer pourquoi dans la limite de fortes barrières ($T_i \ll 1$) à peu près symétriques, proche de la résonance, l'équation (1) peut se mettre sous la forme:

$$T = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{(E - E_o)^2 + \left(\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2}\right)^2}, \quad (5)$$

où $\Gamma_i = \frac{dE}{d\theta} T_i$ et E représente l'énergie de l'onde incidente (on suppose un mouvement unidimensionnel de la particule). Que représente physiquement les différents paramètres E_o , Γ_i ? En appliquant une différence de potentiel $V \rightarrow 0$ entre le réservoir de gauche et celui de droite, que vaut la conductance à température nulle pour $\Gamma_1 = \Gamma_2$?

Question 2: (12 points); temps suggéré = 50 minutes
Loi d'échelle de Thouless pour la localisation

Considérons d'après Thouless une portion de matériau désordonné supposé ici *unidimensionnel*. On suppose que les niveaux d'énergie dans le fil désordonné sont distribués de manière aléatoire. Le temps mis par une particule pour traverser le matériau est $t = L^2/D$ où $D = (\bar{v}^2\tau)/2$ est le coefficient de diffusion (\bar{v} est la vitesse moyenne (de dérive) d'un électron, τ le temps moyen entre deux collisions avec les impuretés dans le matériau, et L la taille du fil).

a) Quelle est alors l'incertitude δE sur la valeur de l'énergie de cet électron au temps t ?

b) Soit $N = nL$ le nombre typique d'électrons et E l'énergie (cinétique) associée. Que représente le rapport $\delta W = dE/dN$ physiquement?

c) En partant de la formule de Drude, montrer que la conductivité dans le fil s'écrit aussi $\sigma = e^2 D \frac{dn}{dE}$, dn/dE étant la densité d'états par unité de longueur (formule de Einstein).

- d) Montrer alors que $\delta E = \frac{1}{\pi} g \delta W$. Que représente g ?
- e) Comment se comporte la résistance du matériau si l'on augmente progressivement la taille du système.
- f) Expliquer comment à partir du problème de deux barrières traitées dans la Question 1, en considérant la résistance de Landauer $R_{Land.} = \langle \frac{1-T}{T} \rangle \neq \mathcal{R}$, on peut montrer que les fonctions d'onde électroniques sont **toujours** localisées pour des fils unidimensionnels suffisamment longs $L \gg l_e$.

Question 3: (6 points); temps suggéré = 20 minutes
Fluctuations universelles de la conductance

Soit un système mésoscopique avec m canaux de conduction. On note

$$g = \frac{Gh}{2e^2} = T = m - R, \quad (6)$$

la conductance normalisée de ce conducteur mésoscopique. En général, la conductance fluctue d'un échantillon à l'autre à cause de la présence d'impuretés. On définit alors:

$$\langle g \rangle = \langle T \rangle = m - \langle R \rangle, \quad (7)$$

où $\langle \dots \rangle$ correspond au moyennage sur les impuretés et R étant la réflexion totale. On introduira la réflexion moyenne par mode r telle que $R = mr$. Dans cette question, nous cherchons à estimer les fluctuations de la conductance g définies par

$$\langle \delta g^2 \rangle = \langle g^2 \rangle - \langle g \rangle^2. \quad (8)$$

- a) Montrer d'abord que $\langle \delta g^2 \rangle = m^2 \langle \delta r^2 \rangle$ avec $\langle \delta r^2 \rangle = \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2$.

Il reste maintenant à évaluer $\langle \delta r^2 \rangle$. Le fait que la réflexion moyenne par mode r fluctue vient du fait qu'un mode i peut être réfléchi en j par les impuretés c'est à dire: $\delta r = \delta r(i \rightarrow j)$. En admettant que $\langle \delta r(i \rightarrow j)^2 \rangle = \langle r(i \rightarrow j) \rangle^2$, il nous reste à évaluer la probabilité moyenne $\langle r(i \rightarrow j) \rangle$ qu'un mode i soit réfléchi en j .

- b) En utilisant le résultat de la question 1 pour le régime diffusif $N \gg 1$, montrer que:

$$\langle r(i \rightarrow j) \rangle = \frac{1}{m} \frac{L}{L + l_e}. \quad (9)$$

- c) En déduire que pour un échantillon diffusif $L \gg l_e$ (sans perte de cohérence de phase), les fluctuations de conductance sont universelles et de l'ordre de $\langle \delta g^2 \rangle \approx 1$.