

(Chapter head:)Mécanique quantique, statistique et condensation de Bose-Einstein

1 Éléments de mécanique quantique. Longueur d'onde de de Broglie et particule dans une boîte

Pour une particule la relation de de Broglie nous donne

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (1)$$

où p est la quantité de mouvement.

Définissons le vecteur d'onde

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2)$$

alors

$$p = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k \quad (3)$$

La généralisation à trois dimension est simplement

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \quad (4)$$

L'énergie cinétique d'une particule libre est donc

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} \quad (5)$$

Lorsqu'une particule est confinée dans une boîte carrée, les seuls états permis sont $\lambda = L$, $\lambda = L/2$, $\lambda = L/3$ ou plus généralement $\lambda = L/n$ où n est un entier. On peut évidemment avoir une longueur d'onde L dans la direction x et $L/2$ dans la direction y etc... Autrement dit, les seuls états permis sont

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L} \quad (6)$$

$$k_y = \frac{2\pi n_y}{L} \quad (7)$$

$$k_z = \frac{2\pi n_z}{L} \quad (8)$$

Le nombre d'états compris dans un intervalle $\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z$ est donc

$$\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = L^3 \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (9)$$

où $d^3 k = dk_x dk_y dk_z$ et comme L est grand, une quantité finie Δn_x est reliée à un infinitésimal $L dk_x / (2\pi)$.

2 Éléments de physique statistique

Pour faire la physique statistique des bosons et des fermions, il faut d'abord savoir compter de combien de façons on peut répartir N bosons ou N fermions dans des états quantiques, N_i/M dans l'état i , etc... où N_i est le nombre de particule dans l'état i et M est le nombre de copies de notre système, copies qui servent à définir l'ensemble statistique. Ensuite, on détermine N_i en maximisant le nombre de façons de faire cette répartition des particules dans les états, sujet à la contrainte que le nombre total de particules réparties dans les M copies est fixe et que l'énergie totale répartie dans ces M copies est aussi fixe. Ces deux contraintes définissent la température absolue et le potentiel chimique. Cette procédure se base sur l'hypothèse que l'état d'équilibre thermodynamique est l'état macroscopique (spécifié par les N_i) qui peut être réalisé du plus de façons possible.

2.1 Analyse combinatoire

D'abord, il faut savoir que le nombre de façons de permuter N objets est donné par $N! = N(N-1)(N-2)\dots 1$.

Le nombre de façon d'arranger n objets choisis parmi N est $N(N-1)\dots(N-n+1) = N!/(N-n)!$

Si on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel les n objets ont été choisis, alors le résultat précédent compte $n!$ permutations de trop, donc le nombre de *combinaisons* de n objets choisis parmi N est

$$\frac{N!}{n!(N-n)!} \quad (10)$$

2.2 Fermions

Considérons M copies de notre système. Pour les fermions, un état ne peut être occupé que par une particule tout au plus. Comme les fermions sont indiscernables, il y a donc

$$\frac{M!}{N_1!(M-N_1)!} \quad (11)$$

façons distinctes de choisir lesquels des M copies de l'état numéro un seront occupées par N_1 fermions. Si on place maintenant N_2 fermions dans l'état 2, il y a

$$\frac{M!}{N_1!(M-N_1)!} \frac{M!}{N_2!(M-N_2)!} \quad (12)$$

façons d'y arriver. La généralisation est évidente

$$\Omega(N_1, N_2, \dots) \equiv \frac{M!}{N_1!(M-N_1)!} \frac{M!}{N_2!(M-N_2)!} \dots \quad (13)$$

Pour trouver le nombre moyen de particules dans l'état i , soit $n_i = N_i/M$ étant donné qu'au total il y a un nombre total de particules $N = \sum_i N_i$ dont l'énergie

totale par boîte est $E = \sum_i \varepsilon_i N_i$ on cherche les valeurs des N_i telles que Ω soit maximum, sujet aux deux contraintes énoncées. En d'autres mots, on pose que chaque façon différente de répartir les bosons (état microscopique) qui satisfait les contraintes est équiprobable. Pour trouver la valeur des N_i les plus probables, il suffit de maximiser Ω . Si Ω est maximum alors $\ln \Omega$ est maximum aussi. Il est plus commode de maximiser $\ln \Omega$ qui est une quantité proportionnelle à M et qui est proportionnelle à l'entropie (une quantité mesurable). Sachant que

$$\ln M! = \ln M + \ln(M-1) + \ln(M-2) + \dots \sim \int_1^M \ln x \, dx = M \ln M - M \quad (14)$$

on a la formule de Stirling

$$\ln M! \simeq M \ln M - M \quad (15)$$

Ceci nous permet d'écrire

$$\ln \Omega = \sum_i [(M - N_i + N_i) \ln M - N_i \ln(N_i) - (M - N_i) \ln(M - N_i)] \quad (16)$$

$$= -M \sum_i \left[\frac{N_i}{M} \ln \left(\frac{N_i}{M} \right) - \left(\frac{M - N_i}{M} \right) \ln \left(\frac{M - N_i}{M} \right) \right] \quad (17)$$

$$= -M \sum_i [n_i \ln n_i + (1 - n_i) \ln(1 - n_i)] \quad (18)$$

où on a défini

$$n_i = N_i/M. \quad (19)$$

Étant donné les contraintes énoncées plus haut

$$\frac{E}{M} = \sum_i \varepsilon_i n_i \quad (20)$$

$$\frac{N}{M} = n = \sum_i n_i \quad (21)$$

on peut maximiser

$$\begin{aligned} W &= \ln \Omega + \beta \left(E - \sum_i \varepsilon_i N_i \right) - \beta \mu \left(N - \sum_i N_i \right) \quad (22) \\ &= M \left[- \sum_i [n_i \ln n_i + (1 - n_i) \ln(1 - n_i)] + \beta \left(\frac{E}{M} - \sum_i \varepsilon_i n_i \right) - \beta \mu \left(n - \sum_i n_i \right) \right] \end{aligned}$$

puisque les quantités entre parenthèse s'annulent. Une fois le maximum de W trouvé en fonction de β et de $\beta \mu$, on trouve β et $\beta \mu$ tels que les deux contraintes soient satisfaites. C'est la méthode dite des multiplicateurs de Lagrange. Cette

procédure mène aux équations

$$\frac{1}{M} \frac{\partial W}{\partial n_i} = 0 = -\ln n_i + \ln(1 - n_i) - \beta\varepsilon_i + \beta\mu \quad (23)$$

$$\ln\left(\frac{n_i}{1 - n_i}\right) = -\beta\varepsilon_i + \beta\mu \quad (24)$$

$$\frac{n_i}{1 - n_i} = e^{-\beta\varepsilon_i + \beta\mu} \quad (25)$$

$$n_i(1 + e^{-\beta\varepsilon_i + \beta\mu}) = e^{-\beta\varepsilon_i + \beta\mu} \quad (26)$$

$$n_i = \frac{e^{-\beta\varepsilon_i + \beta\mu}}{(1 + e^{-\beta\varepsilon_i + \beta\mu})} \quad (27)$$

ce qui correspond à la distribution dite de Fermi-Dirac

$$n_i = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} \quad (28)$$

2.3 Bosons

Pour compter de combien de façons on peut mettre N_1 bosons dans les M copies de l'état 1 et en général N_i bosons dans l'état i , on procède comme suit. D'abord, il faut bien tenir compte du fait que des bosons identiques sont indiscernables.

Les deux rangées ci-dessous sont deux façons différentes d'ordonner les bosons dans les M copies de l'état 1 représentées par des barres verticales. Si deux barres verticales (|) sont permutées entre elles, ou si deux objets (o) sont permutés entre eux dans une rangée, l'ordre n'est pas considéré comme différent. $M - 1$ barres verticales suffisent pour représenter les M copies de l'état considéré.

$$\begin{array}{cccccccc} \circ & | & \circ & \circ & | & \circ & \circ & \circ & \cdots \\ | & | & \circ & | & \circ & \circ & | & \circ & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Donc, il y a

$$\frac{(N_1 + M - 1)!}{N_1!(M - 1)!} \quad (29)$$

façons d'arranger N_1 bosons dans les M copies de l'état. Si on met N_2 bosons dans le niveau 2, il y a maintenant en tout

$$\Omega = \frac{(N_1 + M - 1)! (N_2 + M - 1)!}{N_1!(M - 1)! N_2!(M - 1)!} \quad (30)$$

façons de mettre N_1 bosons dans le niveau 1 et N_2 dans le niveau 2. La généralisation à un nombre quelconque de niveaux est évidente.

Négligeant 1 devant M , et utilisant la formule de Stirling, on obtient

$$\begin{aligned}
\ln \Omega &= \sum_i ((N_i + M) \ln (N_i + M) - N_i \ln N_i - M \ln M) \\
&= \sum_i ((N_i + M) \ln (N_i + M) - N_i \ln N_i - (N_i + M - N_i) \ln M) \\
&= M \sum_i ((n_i + 1) \ln (n_i + 1) - n_i \ln n_i)
\end{aligned} \tag{31}$$

et on peut maximiser suivant la même procédure que pour les fermions

$$\begin{aligned}
W &= \ln \Omega - \beta \left(E - \sum_i \varepsilon_i N_i \right) - \beta \mu \left(N - \sum_i N_i \right) \\
&= M \left[\sum_i ((n_i + 1) \ln (n_i + 1) - n_i \ln n_i) + \beta \left(\frac{E}{M} - \sum_i \varepsilon_i n_i \right) - \beta \mu \left(n - \sum_i n_i \right) \right]
\end{aligned} \tag{32}$$

puisque les quantités entre parenthèse s'annulent. Une fois le maximum de W trouvé en fonction de β et de $\beta\mu$, on trouve β et $\beta\mu$ tels que les deux contraintes soient satisfaites. C'est la méthode dite des multiplicateurs de Lagrange.

Les conditions de maximum sont

$$\frac{1}{M} \frac{\partial W}{\partial n_i} = 0 = \ln (n_i + 1) - \ln n_i - \beta \varepsilon_i + \beta \mu \tag{34}$$

$$\ln \left(\frac{n_i}{n_i + 1} \right) = -\beta \varepsilon_i + \beta \mu \tag{35}$$

$$\frac{n_i}{n_i + 1} = e^{-\beta \varepsilon_i + \beta \mu} \tag{36}$$

$$n_i \left(1 - e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)} \right) = e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)} \tag{37}$$

$$n_i = \frac{e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}}{\left(1 - e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)} \right)} \tag{38}$$

$$= \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1} \tag{39}$$

C'est la distribution dite de Bose Einstein.

2.4 Température et potentiel chimique

La température absolue T en Kelvin est définie par

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \tag{40}$$

et le potentiel chimique par μ .

2.5 Limite classique : quand ne voit-on plus la différence entre fermions et bosons?

Lorsqu'il y a un nombre moyen de particule très faible dans chaque niveau, on ne devrait plus voir la différence entre bosons et fermions. Ceci se produit lorsque

$$n_i = e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)} \quad (41)$$

C'est la distribution dite de Maxwell-Boltzmann.

Pour des particules dans un puits on trouve le potentiel chimique de la façon suivante

$$n = \sum_i n_i = e^{\beta\mu} L^3 \left(\int \frac{dk_x}{2\pi} e^{-\beta\hbar^2 k_x^2 / (2m)} \right)^3 \quad (42)$$

$$e^{\beta\mu} = \frac{n}{L^3} \frac{1}{\left(\int \frac{dk_x}{2\pi} e^{-\beta\hbar^2 k_x^2 / (2m)} \right)^3} \quad (43)$$

Il reste β à trouver. Définissons par K l'énergie par boîte, i.e. $K = E/M$. On a alors

$$K = \sum_i n_i \varepsilon_i = e^{\beta\mu} L^3 \left(\int \frac{dk_x}{2\pi} \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} e^{-\beta\hbar^2 k_x^2 / (2m)} \right)^3 \quad (44)$$

$$= n \frac{\left(\int \frac{dk_x}{2\pi} \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} e^{-\beta\hbar^2 k_x^2 / (2m)} \right)^3}{\left(\int \frac{dk_x}{2\pi} e^{-\beta\hbar^2 k_x^2 / (2m)} \right)^3} = -n \frac{\partial \ln \left(\int \frac{dk_x}{2\pi} e^{-\beta\hbar^2 k_x^2 / (2m)} \right)^3}{\partial \beta} \quad (45)$$

$$= -n \frac{\partial \ln \left(\int \frac{dk_x}{2\pi} e^{-\beta\hbar^2 k_x^2 / (2m)} \right)^3}{\partial \beta} \quad (46)$$

$$= -3n \frac{\partial \ln \left(\left(\frac{2m}{\beta\hbar^2} \right)^{1/2} \left(\frac{\beta\hbar^2}{2m} \right)^{1/2} \int \frac{dk_x}{2\pi} e^{-\beta\hbar^2 k_x^2 / (2m)} \right)}{\partial \beta} \quad (47)$$

$$= -3n \frac{\partial \ln \left(\left(\frac{2m}{\beta\hbar^2} \right)^{1/2} \int \frac{dy}{2\pi} e^{-y^2} \right)}{\partial \beta} = 3n \frac{1}{2\beta} \quad (48)$$

$$= \frac{3}{2} n k_B T \quad (49)$$

2.6 Longueur thermique de de Broglie et passage de la limite quantique à la limite classique

Les effets quantiques ne peuvent plus être négligés lorsque la distance moyenne entre particules devient plus petite que la longueur d'onde de de Broglie moyenne. Cette longueur s'estime de la façon suivante. Comme l'énergie cinétique moyenne est de l'ordre de $k_B T$ on pose (le facteur π est arbitraire ici)

$$\pi k_B T = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m}. \quad (50)$$

De là on déduit,

$$k_x = \left(\frac{2\pi m k_B T}{\hbar^2} \right)^{1/2} = \frac{2\pi}{\lambda_{th}} \quad (51)$$

où la dernière équation définit la longueur thermique de de Broglie λ_{th} . De cette équation on tire

$$\lambda_{th} = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m k_B T} \right)^{1/2} \quad (52)$$

On peut aussi arriver à ce résultat en posant que la séparation entre deux niveaux d'énergie voisins est de l'ordre de $k_B T$.

3 Quantification du flux

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint \frac{\hbar \mathbf{k}}{m} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 2\pi \lambda \frac{\hbar}{m\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{m} \quad (53)$$

4 Condensation de Bose-Einstein¹

Le phénomène en titre a été prédit par Einstein en 1925 et observé 70 ans plus tard en 1995 après de nombreuses années de travail qui ont permis de fabriquer des gaz extrêmement dilués et près du zéro absolu. La condensation de Bose-Einstein a été observée par trois groupes différents utilisant chacun un type d'ion différent, ⁷Li, ²³Na, ⁸⁷Rb. On observe ce phénomène en enlevant subitement le piège optique et en mesurant optiquement la densité du nuage d'atomes qui s'échappe. Cela donne une mesure directe de leur distribution de vitesse. À suffisamment basse température, la largeur du pic observé se concentre autour d'une vitesse nulle (elle n'est pas complètement nulle à cause du principe d'incertitude et du fait que le piège a une taille finie). À température plus élevée, la largeur est celle qu'on peut calculer à partir d'une distribution thermique. Le prix Nobel de 2001 a été attribué à Cornell, Ketterle et Wieman pour cet exploit. On a pu observer la superfluidité et des vortex, en d'autres mots, l'effet des interactions nécessaire à l'observation de ces phénomènes (tel qu'expliqué dans la section précédente) est présent.

Nous allons d'abord expliquer le phénomène théoriquement et démontrer comment il peut survivre à une température différente du zéro absolu et aux interactions. En fait les interactions sont essentielles pour l'existence du phénomène de superfluidité. Ensuite nous nous attarderons à la façon dont on s'y prend pour observer assez directement la condensation de Bose-Einstein. En fait, la superfluidité de ⁴He est une conséquence de la condensation de Bose-Einstein, mais comme les interactions sont fortes dans ce liquide, il n'est pas facile à comprendre à partir de calculs simples. C'est pourquoi nous nous attarderons au cas des atomes froids.

¹J.F. Annett, Superconductivity, Superfluids and condensates, Chap. 1

4.1 Condensation de Bose-Einstein à température finie

Le physicien indien Bose a proposé pour les photons ($\mu = 0$) la distribution qui porte son nom. Incapable de faire publier ses résultats, il plaide auprès d'Einstein qui intervient auprès des éditeurs et qui généralise le résultat de Bose au cas des atomes (ne connaissant pas l'existence de fermions) et découvre le phénomène de condensation.

Nous avons déjà vu que le fondamental d'une assemblée de N bosons à une composante dans le cas sans interaction est donné par

$$|\Omega_N\rangle = \frac{\left(a_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^\dagger\right)^N}{\sqrt{N!}} |0\rangle \quad (54)$$

où $a_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^\dagger$ crée une particule dans l'état $\mathbf{k} = \mathbf{0}$. Que se passe-t-il à température finie? Dans l'ensemble grand canonique on peut calculer la fonction de partition et en extraire le nombre de particules dans un état \mathbf{k}

$$\langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} \quad (55)$$

où la relation de dispersion est donnée par

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (56)$$

On détermine le potentiel chimique comme d'habitude par l'équation donnant le nombre de particules

$$N = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} \quad (57)$$

Comment les particules peuvent-elles toutes être dans l'état $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ à température finie? Supposons d'abord que l'état fondamental est occupé de façon macroscopique par N_0 particules, où N_0 est d'ordre N . On a alors

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} \quad (58)$$

et il faut donc que μ soit très petit pour que le membre de droite soit grand. En développant le dénominateur, on trouve

$$\mu = -\frac{k_B T}{N_0}. \quad (59)$$

L'énergie du premier état excité dans un réseau cubique de côté L est

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2. \quad (60)$$

Donc, pour le premier niveau excité, en posant $N_0 = n_0 L^3$ où n_0 est la densité, on obtient,

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 + \frac{k_B T}{n_0 L^3}. \quad (61)$$

Dans la limite du volume infini, on voit donc (en trois dimensions... encore $d = 2$ ne fonctionne pas) qu'on peut négliger le dernier terme, i.e. mettre $\mu = 0$ pour déterminer l'occupation du premier niveau excité et de tous les autres. Leggett appelle les condensat de Bose Einstein ayant un seul état macroscopiquement occupé un condensat "simple". Autrement, si plus d'un niveau est occupé macroscopiquement, il est fragmenté.

Calculons donc l'occupation de ces niveaux autres que le fondamental lorsque la température est finie

$$N = N_0 + \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_{\mathbf{k}}} - 1} \quad (62)$$

Passant à la limite du continu, on a, avec $V = L^3$

$$\begin{aligned} N &= N_0 + V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_{\mathbf{k}}} - 1} \\ &= N_0 + V \frac{(4\pi)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 dk \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_{\mathbf{k}}} - 1} \end{aligned} \quad (63)$$

On peut changer de variable

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \\ d\varepsilon &= 2 \frac{\hbar^2 k}{2m} dk \\ \frac{(4\pi)}{(2\pi)^3} k^2 dk &= \frac{1}{2\pi^2} k \frac{m d\varepsilon}{\hbar^2} = \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}} \frac{m d\varepsilon}{\hbar^2} \\ &= \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon. \end{aligned} \quad (64)$$

On écrit donc l'équation pour la densité $n = N/V$

$$n = n_0 + \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \quad (65)$$

$$= n_0 + \frac{(mk_B T)^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{1}{e^x - 1} x^{1/2} dx \quad (66)$$

Pour évaluer l'intégrale, on procède comme suit

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{e^x - 1} x^{1/2} dx &= \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} x^{1/2} dx \\
&= \int_0^\infty e^{-x} \sum_{p=0}^\infty (e^{-x})^p x^{1/2} dx \\
&= \sum_{p=1}^\infty \frac{1}{p^{3/2}} \int_0^\infty e^{-y} y^{1/2} dy \\
&= \sum_{p=1}^\infty \frac{1}{p^{3/2}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) \\
&= \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 2.612 \frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned} \tag{67}$$

où ζ est la fonction zeta de Riemann et nous avons utilisé

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-y} y^{t-1} dy \tag{68}$$

et $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$. Substituant dans l'expression pour la densité, nous obtenons

$$n = n_0 + \frac{(mk_B T)^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2 \hbar^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{69}$$

$$= n_0 + \left(\frac{mk_B T}{2\pi \hbar^2}\right)^{3/2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \tag{70}$$

La fraction des particules condensées est donc donnée par

$$\frac{n_0}{n} = 1 - \frac{1}{n} \left(\frac{mk_B T}{2\pi \hbar^2}\right)^{3/2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \tag{71}$$

où nous avons défini la température T_c comme celle où le membre de droite s'annule, soit

$$T_c = \frac{2\pi \hbar^2}{k_B m} \left(\frac{n}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}\right)^{2/3}. \tag{72}$$

Pour des températures plus grandes que cette valeur, $n_0 = 0$ et le potentiel chimique est négatif.

4.2 Passage de la limite classique à la limite quantique et condensation de Bose-Einstein

La température de condensation est reliée à la valeur de température où la longueur d'onde thermique de de Broglie devient comparable à la séparation entre atomes, i.e. au cas où la limite classique n'est plus valable. Cette longueur

thermique s'estime de la façon suivante. Comme l'énergie cinétique moyenne est de l'ordre de $k_B T$ en mécanique classique, on pose (le facteur π est arbitraire ici même s'il peut se justifier (un peu) dans le formalisme des fonctions de Green)

$$\pi k_B T = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m}. \quad (73)$$

De là on déduit,

$$k_x = \left(\frac{2\pi m k_B T}{\hbar^2} \right)^{1/2} = \frac{2\pi}{\lambda_{th}} \quad (74)$$

où la dernière équation définit la longueur thermique de de Broglie λ_{th} . De cette équation on tire

$$\lambda_{th} = \left(\frac{2\pi \hbar^2}{m k_B T} \right)^{1/2} \quad (75)$$

Ceci permet de réécrire la température de condensation de Bose-Einstein sous la forme où la densité de particules est celle trouvée lorsque la distance moyenne est de l'ordre de λ_{th}

$$\lambda_{th}^3 = \zeta \left(\frac{3}{2} \right) n^{-1} \quad (76)$$

car alors

$$\left(\frac{2\pi \hbar^2}{m k_B T_c} \right)^{3/2} = \zeta \left(\frac{3}{2} \right) n^{-1} \quad (77)$$

$$\left(\frac{2\pi \hbar^2}{m k_B T_c} \right) = \zeta \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} n^{-2/3} \quad (78)$$

$$T_c = \frac{2\pi \hbar^2}{k_B m} \left(\frac{n}{\zeta \left(\frac{3}{2} \right)} \right)^{2/3}. \quad (79)$$

4.3 Superfluidité, vitesse critique et interactions

Imaginons un condensat de Bose Einstein dans une géométrie toroïdale. Si on fait tourner le tore, les parois entreront en collision avec le fluide près des bords. Dans l'état superfluide, la condensat ne sera pas entraîné par la rotation des parois et il demeurera au repos. Landau suggéra l'argument suivant. Un particule de quantité de mouvement \mathbf{p} vu du point de vue des parois aura une quantité de mouvement $\mathbf{p} - m\mathbf{v}$ où \mathbf{v} est la vitesse des parois par rapport au système au repos. comme la collision est élastique, la particule repartira avec une quantité de mouvement $\mathbf{p}' - m\mathbf{v}$ de même grandeur mais de direction différente. Cela ne sera donc possible que si $\mathbf{p}^2 - m\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{p}'^2 - m\mathbf{p}' \cdot \mathbf{v}$. Dans le cas d'une particule appartenant au condensat, $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ et il suffit donc de satisfaire $\mathbf{p}'^2 = m\mathbf{p}' \cdot \mathbf{v}$ ce qu'il est toujours possible de satisfaire en choisissant l'angle de diffusion de façon appropriée. Ainsi, un condensat de Bose-Einstein pour un système sans interactions n'est pas un superfluide.

La présence des interactions a l'effet dramatique suivant. Les états de basse énergie sont des modes collectifs obéissant à la relation

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} = c|\mathbf{p}|. \quad (80)$$

Ainsi, si la vitesse des parois $|\mathbf{v}|$ est plus petite que c , il est impossible de créer des excitations dans le système et c'est ce qui explique le fait que la partie superfluide du système n'est pas entraînée par les parois. Les excitations de basse énergie se calculent aisément dans le cas d'interactions faibles. Ce calcul est fait dans le livre de Annett section 5.6. Il suffit d'écrire $\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) + \delta\psi(\mathbf{r})$ où $\psi_0(\mathbf{r})$ est le condensat et de garder les termes quadratiques en $\delta\psi(\mathbf{r})$. Une transformation de Boboliubov analogue à celle fait pour l'antiferroaimant nous donne la solution. La vitesse est donnée par

$$c = \left(\frac{\hbar^2 n_0 g}{m} \right)^{1/2}. \quad (81)$$

Cela ne décrit pas toutes les excitations dans le cas de systèmes qui interagissent fortement comme ${}^4\text{He}$. Il y a aussi ce qu'on appelle des rotons.

Leggett² explique aussi que les états superfluides peuvent être métastables, c'est-à-dire exister très longtemps même s'ils ne sont pas des états d'équilibre.

4.4 Pièges magnétiques et optiques pour les atomes froids et observation du phénomène

À la fin des années 30, il fut découvert que ${}^4\text{He}$ était un superfluide. Cet atome est un boson car il possède deux électrons, deux protons et deux neutrons, soit un nombre pair de particules. Lorsque les énergies sont suffisamment basses pour qu'il soit impossible de séparer les constituants, il n'est pas nécessaire d'écrire une fonction d'onde qui est antisymétrique sous échange de n'importe quelle paire de particules. Seuls deux atomes complets de ${}^4\text{He}$ pourront s'échanger et donc leur fonction d'onde ne changera pas de signe, ce sont des bosons.

En utilisant la densité $\rho \approx 145 \text{ kg/m}^3$ pour l' ${}^4\text{He}$, on trouve que la température de condensation est d'environ 3.11 K, ce qui est de l'ordre de grandeur de la température de 2.2 K à laquelle ce liquide devient superfluide. Le ${}^3\text{He}$ est un fermion qui devient superfluide à une température environ mill fois plus basse, bien que chimiquement il soit identique à l' ${}^4\text{He}$. La superfluidité dans ce cas vient du phénomène de Cooper que nous discuterons dans le contexte de la supraconductivité. Cela démontre dramatiquement l'influence des statistiques quantiques.

Malheureusement, les atomes d' ${}^4\text{He}$ interagissent très fortement et il n'est pas facile de faire des prédictions théoriques. En 1995, le phénomène de condensation de Bose-Einstein d'un gaz très dilué interagissant très fortement a été observé pour la première fois avec des atomes de ${}^{87}\text{Rb}$. Les densités de ces atomes dans des pièges sont de l'ordre de $10^{11} - 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ comparé à ${}^4\text{He}$

²A.J. Leggett, Quantum Liquids, Oxford Graduate Texts, (2006).

dont la densité est de $2 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$. De plus ils sont beaucoup plus lourds. Leur température de condensation de Bose-Einstein est estimée être de l'ordre de $10^{-8} - 10^{-6} \text{ K}$. Aussi incroyable que cela puisse paraître, ces températures peuvent être atteintes grâce à plusieurs trucs d'optique quantique. Nous n'en décrivons que quelques aspects et de façon très schématique.

On utilise généralement les alcalins parce que leur électron de valence solitaire forme de grandes orbites qui sont plus facilement polarisables et donc interagissent plus fortement avec la lumière. Ces atomes seront des bosons s'ils ont un nombre impair de nucléons. Par exemple, ${}^7\text{Li}$, ${}^{23}\text{Na}$, ${}^{87}\text{Rb}$ ont tous un spin nucléaire $I = 3/2$. Comme $S = 1/2$, leur spin total F peut donc prendre les valeurs $F = 2$ et $F = 1$. Une des techniques pour piéger ces atomes est d'utiliser un champ magnétique. Cela semble à priori bizarre parce que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ implique qu'il ne peut y avoir de maximum du champ magnétique (Théorème de Earnshaw). Ce théorème n'élimine pas la possibilité d'avoir un minimum.

4.5 Extensions

On peut aussi créer un réseau pour les atomes en se servant du patron d'interférence des lasers qui servent à les piéger. Ils peuvent servir de systèmes modèles pour la physique du solide. Les énergies sont telles que les atomes se comportent comme s'ils étaient décrits par un modèle de Hubbard. Un des grands objectifs de ce domaine est de trouver des conditions où il sera possible de modéliser les supraconducteurs à haute température.

Plusieurs résultats spectaculaires ont été obtenus ces dernières années. Par exemple,

- un phénomène dynamique intéressant où le système oscille entre un isolant de Mott et un condensat de Bose-Einstein

Greiner M, Mandel O, Hansch TW, et al.

Collapse and revival of the matter wave field of a Bose-Einstein condensate
NATURE 419 (6902): 51-54 SEP 5 2002

- La transition superfluide isolant de Mott, traitée dans le devoir 5

Greiner M, Mandel O, Esslinger T, et al.

Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms

NATURE 415 (6867): 39-44 JAN 3 2002

- Un système équivalent à un modèle de bosons de coeur dur en une dimension

Paredes B, Widera A, Murg V, et al.

Tonks-Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice
NATURE 429 (6989): 277-281 MAY 20 2004

- La formation de paires de Cooper

Koponen T, Kinnunen J, Martikainen JP, et al.
Fermion pairing with spin-density imbalance in an optical lattice
NEW JOURNAL OF PHYSICS 8: Art. No. 179 SEP 5 2006