Fonctions de Green : Solutions aux exercices

Marc Chamberland
Département de physique
Université de Sherbrooke

4 juillet 2006

Résumé

Voici les solutions aux exercices proposés dans le document sur les fonctions de Green. Il est possible que des erreurs se soient glissées dans les développements. Vous me serez gré de bien vouloir me pardonner.

1 Exercice 1 : Dérivée d'un opérateur d'annihilation

1.1 Énoncé

Soit un système de N sites indépendants, sans possibilité de saut entre eux. L'Hamiltonien d'un tel système pourrait avoir la forme suivante :

$$H_o = \sum_{k,\sigma} \epsilon_k c^\dagger_{k,\sigma} c_{k,\sigma}$$

où les opérateurs obéissent aux lois d'anticommutation :

$$\begin{aligned} \left\{ c_{k,\sigma}, c^\dagger_{k',\sigma'} \right\} &= \delta_{k,k'} \delta_{\sigma,\sigma'} \\ \left\{ c_{k,\sigma}, c_{k',\sigma'} \right\} &= 0 = \left\{ c^\dagger_{k,\sigma}, c^\dagger_{k',\sigma'} \right\} \end{aligned}$$

D'abord, prouvez que

$$[A, BC] = \{A, B\} C - B \{A, C\}$$

puis trouvez

$$i\hbar \frac{\partial c_{k,\sigma}}{\partial t}$$

1.2 Solution

Pour le commutateur, on a :

$$\begin{aligned}
[A, BC] &= ABC - BCA \\
&= ABC + (BAC - BAC) - BCA \\
&= (ABC + BAC) - (BAC + BCA) \\
&= (AB + BA)C - B(AC + CA) \\
&= \{A, B\} C - B \{A, C\}
\end{aligned}$$

Pour la dérivée de l'opérateur d'annihilation, on a :

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial c_{k,\sigma}}{\partial t} &= [c_{k,\sigma}, H_o] = \left[c_{k,\sigma}, \sum_{k',\sigma'} \epsilon_{k'} c^{\dagger}_{k',\sigma'} c_{k',\sigma'} \right] \\
&= \sum_{k',\sigma'} \epsilon_{k'} \left[c_{k,\sigma}, c^{\dagger}_{k',\sigma'} c_{k',\sigma'} \right] = \sum_{k',\sigma'} \epsilon_{k'} \left(\left\{ c_{k,\sigma}, c^{\dagger}_{k',\sigma'} \right\} c_{k',\sigma'} - c^{\dagger}_{k',\sigma'} \{ c_{k,\sigma}, c_{k',\sigma'} \} \right)
\end{aligned}$$

où on a utilisé la relation prouvée précédemment. On peut désormais utiliser les relations d'anticommutation. En effet, $\{c_{k,\sigma}, c_{k',\sigma'}\} = 0$ peu importe k et σ. Puis, $\left\{ c_{k,\sigma}, c^{\dagger}_{k',\sigma'} \right\} = 1$ seulement lorsque $k' = k$ et $\sigma' = \sigma$. On obtient donc :

$$i\hbar \frac{\partial c_{k,\sigma}}{\partial t} = \epsilon_k c_{k,\sigma}$$

2 Exercice 2 : Dérivée de la fonction de Green retardée

2.1 Énoncé

Trouvez

$$i \frac{\partial G^R(k,t)}{\partial t}$$

2.2 Solution

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial G^R(k,t)}{\partial t} &= i \frac{\partial \left(-i \left(\left\langle c_k(t) c_k^{\dagger} \right\rangle + \left\langle c_k^{\dagger} c_k(t) \right\rangle \right) \Theta(t) \right)}{\partial t} \\
&= \frac{\partial \left(\left\langle c_k(t) c_k^{\dagger} \right\rangle + \left\langle c_k^{\dagger} c_k(t) \right\rangle \right)}{\partial t} \Theta(t) + \left(\left\langle c_k(t) c_k^{\dagger} \right\rangle + \left\langle c_k^{\dagger} c_k(t) \right\rangle \right) \frac{\partial \Theta(t)}{\partial t} \\
&= \left(\left\langle \frac{\partial c_k(t)}{\partial t} c_k^{\dagger} \right\rangle + \left\langle c_k^{\dagger} \frac{\partial c_k(t)}{\partial t} \right\rangle \right) \Theta(t) + \left(\left\langle c_k(t) c_k^{\dagger} \right\rangle + \left\langle c_k^{\dagger} c_k(t) \right\rangle \right) \delta(t)
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\frac{\partial c_k^\dagger}{\partial t} = 0$ et que $\frac{\partial \Theta(t)}{\partial t} = \delta(t)$. On se rappellera que $c_k^\dagger = c_k^\dagger(0)$ et on remarquera maintenant qu'en utilisant les propriétés de la fonction delta et les relations de commutation des opérateurs de création-annihilation, on a :

$$\begin{aligned}
\left(\left\langle c_k(t)c_k^\dagger\right\rangle + \left\langle c_k^\dagger c_k(t)\right\rangle\right)\delta(t) &= \left(\left\langle c_k(t)c_k^\dagger(0)\right\rangle + \left\langle c_k^\dagger(0) c_k(t)\right\rangle\right)\delta(t) \\
&= \left\langle c_k(0)c_k^\dagger(0)\right\rangle + \left\langle c_k^\dagger(0) c_k(0)\right\rangle \\
&= \left[c_k(0), c_k^\dagger(0)\right] \\
&= 1
\end{aligned}$$

On peut ainsi continuer le développement en utilisant le résultat de l'exercice précédent :

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial G^R(k,t)}{\partial t} &= \left(\left\langle \frac{\partial c_k(t)}{\partial t}c_k^\dagger\right\rangle + \left\langle c_k^\dagger \frac{\partial c_k(t)}{\partial t}\right\rangle\right)\Theta(t) + \left(\left\langle c_k(t)c_k^\dagger\right\rangle + \left\langle c_k^\dagger c_k(t)\right\rangle\right)\delta(t) \\
&= \left(\left\langle -i\epsilon_k c_k(t)c_k^\dagger\right\rangle + \left\langle c_k^\dagger(-i\epsilon_k c_k(t))\right\rangle\right)\Theta(t) + 1 \\
&= -i\epsilon_k\left(\left\langle c_k(t)c_k^\dagger\right\rangle + \left\langle c_k^\dagger c_k(t)\right\rangle\right)\Theta(t) + 1
\end{aligned}$$

Finalement, on remarque que la définition initiale de $G^R(k,t)$ apparaît du côté droit de l'équation, ce qui donne :

$$i\frac{\partial G^R(k,t)}{\partial t} = \epsilon_k G^R(k,t) + 1$$

3 Exercice 3 : Dérivée de la fonction de Green en temps imaginaire

3.1 Énoncé

Trouvez

$$\frac{\partial G(k,\tau)}{\partial \tau}$$

3.2 Solution

Il ne s'agit ici que de reprendre la même démarche qu'à l'exercice précédent, en utilisant la nouvelle définition de G. À cet effet, on aura besoin de $\frac{\partial c_k}{\partial \tau}$. Or il est facile de voir qu'on obtiendra, à un facteur $-\frac{i}{\hbar}$ près, le même résultat qu'auparavant :

$$\frac{\partial c_k}{\partial \tau} = \epsilon_k c_k$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(k,\tau)}{\partial \tau} &= \frac{\partial\left(\left\langle c_k(\tau)c_k^\dagger\right\rangle \Theta(\tau) - \left\langle c_k^\dagger c_k(\tau)\right\rangle \Theta(-\tau)\right)}{\partial \tau} \\
&= \left\langle \frac{\partial c_k(\tau)}{\partial \tau} c_k^\dagger \right\rangle \Theta(\tau) + \left\langle c_k(\tau)c_k^\dagger\right\rangle \frac{\partial \Theta(\tau)}{\partial \tau} - \left\langle c_k^\dagger \frac{\partial c_k(\tau)}{\partial \tau}\right\rangle \Theta(-\tau) - \left\langle c_k^\dagger c_k(\tau)\right\rangle \frac{\partial \Theta(-\tau)}{\partial \tau}
\end{aligned}$$

où $\frac{\partial \Theta(-\tau)}{\partial \tau}$ se calcule de la façon suivante :

$$\frac{\partial \Theta(-\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \Theta(-\tau)}{\partial (-\tau)} \frac{\partial (-\tau)}{\partial \tau} = \delta(-\tau)(-1) = -\delta(\tau)$$

et où on a utilisé le caractère pair de la fonction delta, i.e. $\delta(-\tau) = \delta(\tau)$. Donc on a :

$$\frac{\partial G(k,\tau)}{\partial \tau} = \epsilon_k \left\langle c_k(\tau)c_k^\dagger\right\rangle \Theta(\tau) - \epsilon_k \left\langle c_k^\dagger c_k(\tau)\right\rangle \Theta(-\tau) + \underbrace{\left(\left\langle c_k(\tau)c_k^\dagger\right\rangle + \left\langle c_k^\dagger c_k(\tau)\right\rangle\right)}_{1} \delta(\tau)$$

ce qui donne, en bout de ligne, le même résultat que précédemment :

$$\frac{\partial G(k,\tau)}{\partial \tau} = \epsilon_k G(k,\tau) + 1$$

4 Exercice 4 : Trace et antipériodicité

4.1 Énoncé

Prouvez que

$$Tr(AB) = Tr(BA)$$

et que par conséquent, la trace est invariante lorsque l'on change de base, c'est-à-dire lorsqu'on applique une transformation de la forme $U = S^{-1}AS$. En d'autres mots, prouvez que

$$Tr(U) = Tr(A)$$

Utilisez ensuite les résultats précédents pour prouver l'antipériodicité de la fonction de Green

$$G(k, \tau + \beta) = -G(k, \tau)$$

lorsque $\tau < 0$ et $(\tau + \beta) > 0$.

4.2 Solution

$$Tr\left(AB\right)=\sum_{i}\left(AB\right)_{ii}=\sum_{i}\sum_{j}A_{ij}B_{ji}=\sum_{j}\sum_{i}B_{ji}A_{ij}=\sum_{j}\left(BA\right)_{jj}=Tr\left(BA\right)$$

La troisième étape de ce développement utilise la commutativité de la multiplication puisque A_{ij} et B_{ji} sont des nombres réels et non des matrices.

Ce résultat nous permet de prouver très facilement que

$$Tr\left(U\right)=Tr\left(S^{-1}AS\right)=Tr\left(SS^{-1}A\right)=Tr\left(A\right)$$

puisque $SS^{-1}=\boldsymbol{I}$ où $\boldsymbol{I}$ est la matrice identité.

On sait que pour $\tau<0$, on a

$$G(k,\tau)=-\left\langle c_k^{\dagger}c_k(\tau)\right\rangle$$

et pour $(\tau+\beta)>0$, on a

$$G\left(k,\tau+\beta\right)=\left\langle c_k(\tau)c_k^{\dagger}\right\rangle$$

Utilisons maitenant la définition de la moyenne d'un opérateur qui fait intervenir la trace, ainsi que la définition de l'opérateur en temps imaginaire :

$$\begin{aligned}
G\left(k,\tau+\beta\right) &= \frac{Tr\left(e^{-\beta H}c_k(\tau)c_k^{\dagger}\right)}{Tr\left(e^{-\beta H}\right)}=\frac{Tr\left(e^{-\beta H}e^{H(\tau+\beta)}c_ke^{-H(\tau+\beta)}c_k^{\dagger}\right)}{Tr\left(e^{-\beta H}\right)}\\
&= \frac{Tr\left(e^{-\beta H}e^{\beta H}e^{H\tau}c_ke^{-H\tau}e^{-\beta H}c_k^{\dagger}\right)}{Tr\left(e^{-\beta H}\right)}=\frac{Tr\left(e^{H\tau}c_ke^{-H\tau}e^{-\beta H}c_k^{\dagger}\right)}{Tr\left(e^{-\beta H}\right)}\\
&= \frac{Tr\left(e^{-\beta H}c_k^{\dagger}e^{H\tau}c_ke^{-H\tau}\right)}{Tr\left(e^{-\beta H}\right)}=\frac{Tr\left(e^{-\beta H}c_k^{\dagger}c_k\left(\tau\right)\right)}{Tr\left(e^{-\beta H}\right)}\\
&= \left\langle c_k^{\dagger}c_k(\tau)\right\rangle\\
&= -G(k,\tau)
\end{aligned}$$

5 Exercice 5 : Amas et bain

5.1 Énoncé

Un amas constitué d'un seul site o d'énergie ϵ_o est entouré de plusieurs "sites" de bain i d'énergie ϵ_i. Il est possible pour une particule de passer de l'amas au bain avec une amplitude de saut t_{io} et vice versa. Or il n'y a aucune interaction entre les sites de bain, i.e. une particule ne peut sauter d'un site de bain à un autre. L'Hamiltonien de ce système peut s'écrire de la façon suivante :

$$H=\epsilon_o c_o^\dagger c_o+\sum_i \epsilon_i c_i^\dagger c_i+\sum_i t_{io} c_i^\dagger c_o+\sum_i t_{oi} c_o^\dagger c_i$$

où on assume a priori que $t_{io}\neq t_{oi}$.

On définit maintenant les fonctions de Green suivantes :

$$\begin{aligned}
G_{oo} &\equiv \left\langle c_o(\tau)c_o^\dagger\right\rangle \Theta(\tau)-\left\langle c_o^\dagger c_o(\tau)\right\rangle \Theta(-\tau)\\
G_{oi} &\equiv \left\langle c_o(\tau)c_i^\dagger\right\rangle \Theta(\tau)-\left\langle c_i^\dagger c_o(\tau)\right\rangle \Theta(-\tau)
\end{aligned}$$

Trouvez G_{oo} en trouvant d'abord $\frac{\partial G_{oo}}{\partial\tau}$, puis en utilisant la représentation en série de Fourier pour faire disparaître la dérivée. Traitez ensuite le problème comme un système d'équations à résoudre. Vous aurez besoin d'autant d'équations que d'inconnues, bien entendu.

5.2 Solution

Voilà un exercice plutôt long, mais dont la solution ressemble fortement aux cas précédents. Pour calculer $\frac{\partial G_{oo}}{\partial\tau}$, il faut d'abord connaître $\frac{\partial c_o}{\partial\tau}$ qui pourrait être différent de celui calculé précédemment étant donné que l'Hamiltonien est contient des termes supplémentaires.

On utilise donc la même méthode pour trouver :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_o}{\partial\tau} &= [c_o,H]=\epsilon_o\left[c_o,c_o^\dagger c_o\right]+\sum_i\epsilon_i\left[c_o,c_i^\dagger c_i\right]+\sum_i t_{io}\left[c_o,c_i^\dagger c_o\right]+\sum_i t_{oi}\left[c_o,c_o^\dagger c_i\right]\\
&= \epsilon_o\left(\underbrace{\left\{c_o,c_o^\dagger\right\}}_{1}c_o-c_o^\dagger\underbrace{\left\{c_o,c_o\right\}}_{0}\right)+\sum_i\epsilon_i\left(\underbrace{\left\{c_o,c_i^\dagger\right\}}_{0}c_i-c_i^\dagger\underbrace{\left\{c_o,c_i\right\}}_{0}\right)\\
&\quad+\sum_i t_{io}\left(\underbrace{\left\{c_o,c_i^\dagger\right\}}_{0}c_o-c_i^\dagger\underbrace{\left\{c_o,c_o\right\}}_{0}\right)+\sum_i t_{oi}\left(\underbrace{\left\{c_o,c_o^\dagger\right\}}_{1}c_i-c_o^\dagger\underbrace{\left\{c_o,c_i\right\}}_{0}\right)\\
&= \epsilon_o c_o+\sum_i t_{oi}c_i
\end{aligned}$$

On calcule ensuite la dérivée de G_{oo} :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G_{oo}}{\partial \tau} &= \frac{\partial\left(\left\langle c_o(\tau)c_o^\dagger\right\rangle \Theta(\tau) - \left\langle c_o^\dagger c_o(\tau)\right\rangle \Theta(-\tau)\right)}{\partial \tau} \\
&= \left\langle \frac{\partial c_o(\tau)}{\partial \tau} c_o^\dagger \right\rangle \Theta(\tau) + \left\langle c_o(\tau)c_o^\dagger\right\rangle \frac{\partial \Theta(\tau)}{\partial \tau} - \left\langle c_o^\dagger \frac{\partial c_o(\tau)}{\partial \tau}\right\rangle \Theta(-\tau) - \left\langle c_o^\dagger c_o(\tau)\right\rangle \frac{\partial \Theta(-\tau)}{\partial \tau} \\
&= \epsilon_o \left\langle c_o(\tau)c_o^\dagger\right\rangle \Theta(\tau) + \sum_i t_{oi} \left\langle c_i\left(\tau\right) c_o^\dagger\right\rangle \Theta(\tau) - \epsilon_o \left\langle c_o^\dagger c_o(\tau)\right\rangle \Theta(-\tau) \\
&\quad - \sum_i t_{oi} \left\langle c_o^\dagger c_i\left(\tau\right)\right\rangle \Theta(-\tau) + \underbrace{\left(\left\langle c_o(\tau)c_o^\dagger\right\rangle + \left\langle c_o^\dagger c_o(\tau)\right\rangle\right) \delta\left(\tau\right)}_{1} \\
&= \epsilon_o G_{oo} + \sum_i t_{oi} G_{io} + 1
\end{aligned}
$$

qui peut aussi s'écrire ainsi :

$$
i\omega_n G_{oo} = \epsilon_o G_{oo} + \sum_i t_{io} G_{io} + 1
$$

On se rend compte que cette équation compte deux inconnues, soit G_{oo} et G_{io}. Il faut donc trouver également G_{io}. À cet égard, on doit calculer d'abord $\frac{\partial c_i}{\partial \tau}$. On utilise l'indice j afin de distinguer l'indice de l'opérateur que l'on dérive et les indices des autres opérateurs :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c_j}{\partial \tau} &= \left[c_j, H\right] = \epsilon_o \left[c_j, c_o^\dagger c_o\right] + \sum_i \epsilon_i \left[c_j, c_i^\dagger c_i\right] + \sum_i t_{io} \left[c_j, c_i^\dagger c_o\right] + \sum_i t_{oi} \left[c_j, c_o^\dagger c_i\right] \\
&= \epsilon_o \left(\underbrace{\left\{c_j, c_o^\dagger\right\}}_{0} c_o - c_o^\dagger \underbrace{\left\{c_j, c_o\right\}}_{0}\right) + \sum_i \epsilon_i \left(\underbrace{\left\{c_j, c_i^\dagger\right\}}_{1 \text{ si } i=j} c_i - c_i^\dagger \underbrace{\left\{c_j, c_i\right\}}_{0}\right) \\
&\quad + \sum_i t_{io} \left(\underbrace{\left\{c_j, c_i^\dagger\right\}}_{1 \text{ si } i=j} c_o - c_i^\dagger \underbrace{\left\{c_j, c_o\right\}}_{0}\right) + \sum_i t_{oi} \left(\underbrace{\left\{c_j, c_o^\dagger\right\}}_{0} c_i - c_o^\dagger \underbrace{\left\{c_j, c_i\right\}}_{0}\right) \\
&= \epsilon_j c_j + t_{jo} c_o
\end{aligned}
$$

Le calcul de $\frac{\partial G_{io}}{\partial \tau}$ est très simple :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G_{io}}{\partial \tau} &= \frac{\partial\left(\left\langle c_i(\tau)c_o^\dagger\right\rangle\Theta(\tau)-\left\langle c_o^\dagger c_i(\tau)\right\rangle\Theta(-\tau)\right)}{\partial\tau} \\
&= \left\langle \frac{\partial c_i(\tau)}{\partial\tau}c_o^\dagger\right\rangle\Theta(\tau)+\left\langle c_i(\tau)c_o^\dagger\right\rangle\frac{\partial\Theta(\tau)}{\partial\tau}-\left\langle c_o^\dagger\frac{\partial c_i(\tau)}{\partial\tau}\right\rangle\Theta(-\tau)-\left\langle c_o^\dagger c_i(\tau)\right\rangle\frac{\partial\Theta(-\tau)}{\partial\tau} \\
&= \epsilon_i\left\langle c_i(\tau)c_o^\dagger\right\rangle\Theta(\tau)+t_{io}\left\langle c_o\left(\tau\right)c_o^\dagger\right\rangle\Theta(\tau)-\epsilon_i\left\langle c_o^\dagger c_i(\tau)\right\rangle\Theta(-\tau) \\
&\quad -t_{io}\left\langle c_o^\dagger c_o\left(\tau\right)\right\rangle\Theta(-\tau)+\underbrace{\left(\left\langle c_i(\tau)c_o^\dagger\right\rangle+\left\langle c_o^\dagger c_i(\tau)\right\rangle\right)\delta\left(\tau\right)}_{0} \\
&= \epsilon_i G_{io}+t_{io}G_{oo}
\end{aligned}
$$

qui s'écrit aussi :

$$
\begin{aligned}
i\omega_n G_{io} &= \epsilon_i G_{io}+t_{io}G_{oo} \\
\left(i\omega_n-\epsilon_i\right)G_{io} &= t_{io}G_{oo} \\
G_{io} &= \frac{t_{io}}{i\omega_n-\epsilon_i}G_{oo}
\end{aligned}
$$

On peut maintenant remplacer G_{io} dans l'équation de G_{oo} :

$$
\begin{aligned}
i\omega_n G_{oo} &= \epsilon_o G_{oo}+\sum_i t_{oi}\left(\frac{t_{io}}{i\omega_n-\epsilon_i}G_{oo}\right)+1 \\
G_{oo} &= \frac{1}{i\omega_n-\epsilon_o-\sum_i\frac{t_{oi}t_{io}}{i\omega_n-\epsilon_i}}=\frac{1}{i\omega_n-\epsilon_o-\sum_i t_{oi}\widetilde{G}_{ii}t_{io}}
\end{aligned}
$$

où G_{ii} est de la même forme que G_k trouvé à l'exercice 3.

6 Exercice 6 : Interactions

6.1 Énoncé

On reprend le même système qu'à l'exercice précédent en y ajoutant maintenant des interactions entre les sites de bain. Il peut désormais y avoir des sauts d'amplitude t_{ij} entre les différents sites de bain.

Montrez que dans cette situation, G_{oo} a la forme *suivante :*

$$
G_{oo}=\frac{1}{\widetilde{G}_{oo}^{-1}-t_{oi}G_{ij}t_{jo}}
$$

où

$$
\widetilde{G}_{oo}=\frac{1}{i\omega_n-\epsilon_o}
$$

et où on a adopté la notation d'Einstein, i.e. on sous-entend une somme sur les indices répétés. Par exemple, $t_{oi}G_{ij}t_{jo}$ signifie $\sum_{i,j} t_{oi}G_{ij}t_{jo}$ puisque les indices i et j apparaissent deux fois dans l'expression.

Pour arriver à la solution, considérez d'abord un système qui ne contient que deux sites de bain et trouvez les équations du mouvement pour les différentes fonctions de Green. Généralisez ensuite pour un nombre arbitraire de sites.

Cet exercice est plutôt ardu et vous pouvez librement négliger la rigueur mathématique.

6.2 Solution

La solution proposée manque certainement de rigueur. On en tirera au moins que de très simples interactions augmentent de façon substantielle la complexité d'un système à traiter.

Dans le cas où on n'inclut que deux sites de bain, on a l'Hamiltonien (écrit de façon explicite) suivant :

$$H = \epsilon_o c_o^\dagger c_o + \epsilon_1 c_1^\dagger c_1 + \epsilon_2 c_2^\dagger c_2 + t_{o1} c_o^\dagger c_1 + t_{o2} c_o^\dagger c_2 + t_{1o} c_1^\dagger c_o + t_{2o} c_2^\dagger c_o + t_{12} c_1^\dagger c_2 + t_{21} c_2^\dagger c_1$$

On reprend encore la même démarche qu'auparavant et on trouve les résultats suivants pour les opérateurs :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_o}{\partial \tau} &= \epsilon_o c_o + t_{o1} c_1 + t_{o2} c_2 \\
\frac{\partial c_1}{\partial \tau} &= \epsilon_1 c_1 + t_{1o} c_o + t_{12} c_2 \\
\frac{\partial c_2}{\partial \tau} &= \epsilon_2 c_2 + t_{2o} c_o + t_{21} c_1
\end{aligned}$$

puis les équations suivantes pour les fonctions de Green :

$$\begin{aligned}
i\omega_n G_{oo} &= \epsilon_o G_{oo} + t_{o1} G_{1o} + t_{o2} G_{2o} + 1 \\
i\omega_n G_{1o} &= \epsilon_1 G_{1o} + t_{1o} G_{oo} + t_{12} G_{2o} \\
i\omega_n G_{2o} &= \epsilon_2 G_{2o} + t_{2o} G_{oo} + t_{21} G_{1o}
\end{aligned}$$

Généralisons maintenant ces trois dernières équations au cas à N sites en notation d'Einstein :

$$\begin{aligned}
(i\omega_n - \epsilon_o)\, G_{oo} &= 1 + t_{oi} G_{io} \\
(i\omega_n - \epsilon_i)\, G_{io} &= t_{io} G_{oo} + t_{ij} G_{jo}
\end{aligned}$$

En utilisant $\widetilde{G}_{ii}$, on réécrit sous la forme :

$$
\begin{aligned}
G_{oo} &= \widetilde{G}_{oo} + \widetilde{G}_{oo} t_{oi} G_{io} \\
G_{io} &= \widetilde{G}_{ii} t_{io} G_{oo} + \widetilde{G}_{ii} t_{ij} G_{jo} \rightsquigarrow -\widetilde{G}_{ii} t_{ij} G_{jo} + G_{io} = \widetilde{G}_{ii} t_{io} G_{oo}
\end{aligned}
$$

On peut mettre G_{jo} en évidence si $i = j$. À cet effet, on fait intervenir une fonction delta de telle sorte que :

$$
\begin{aligned}
\left(\delta_{ij} - \widetilde{G}_{ii} t_{ij}\right) G_{jo} &= \widetilde{G}_{ii} t_{io} G_{oo} \\
A_{ij} G_{jo} &= \widetilde{G}_{ii} t_{io} G_{oo}
\end{aligned}
$$

avec

$$
A_{ij} \equiv \left(\delta_{ij} - \widetilde{G}_{ii} t_{ij}\right)
$$

On peut voir cette équation comme une multiplication matricielle. On multiplie alors par la matrice inverse A_{ki}^{-1} :

$$
\begin{aligned}
A_{ki}^{-1} A_{ij} G_{jo} &= A_{ki}^{-1} \widetilde{G}_{ii} t_{io} G_{oo} \\
G_{ko} &= A_{ki}^{-1} \widetilde{G}_{ii} t_{io} G_{oo}
\end{aligned}
$$

On remplace maintenant cette expression dans l'équation de G_{oo} :

$$
\begin{aligned}
G_{oo} &= \widetilde{G}_{oo} + \widetilde{G}_{oo} t_{oi} \left(A_{ij}^{-1} \widetilde{G}_{jj} t_{jo} G_{oo}\right) \\
\widetilde{G}_{oo}^{-1} G_{oo} &= 1 + t_{oi} A_{ij}^{-1} \widetilde{G}_{jj} t_{jo} G_{oo} \\
G_{oo} &= \frac{1}{\widetilde{G}_{oo}^{-1} - t_{oi} A_{ij}^{-1} \widetilde{G}_{jj} t_{jo}} \\
&= \frac{1}{\widetilde{G}_{oo}^{-1} - t_{oi} \left(\delta - \widetilde{G}_{ii} t\right)_{ij}^{-1} \widetilde{G}_{jj} t_{jo}} \\
&= \frac{1}{\widetilde{G}_{oo}^{-1} - t_{oi} \left(\widetilde{G}^{-1} - t\right)_{ij}^{-1} t_{jo}}
\end{aligned}
$$

où on a utilisé la propriété $A^{-1}\widetilde{G} = \left(\widetilde{G}^{-1} A\right)^{-1}$. On retrouve donc la même *forme* que demandée.

Alternativement, on peut utiliser des diagrammes de Feynman simplifiés. Souvenons-nous que $\widetilde{G}_{oo}$ n'implique aucune interaction entre les sites (donc les particules restent sur place) tandis que G_{oo}, comme on le voit de façon assez éloquente, peut impliquer plusieurs sites différents du bain. On définit alors les conventions suivantes :

$$\begin{aligned} G_{oo}\colon o &\Longrightarrow o \\ G_{io}\colon i &\Longrightarrow o \\ \widetilde{G}_{oo}\colon o &\longrightarrow o \\ \widetilde{G}_{io}\colon i &\longrightarrow o \end{aligned}$$

$$t_{io}\colon i \times o$$

Donc, on peut exprimer G_{oo} de la façon suivante :

$$\begin{aligned} G_{oo} &= \widetilde{G}_{oo} + \widetilde{G}_{oo} t_{oi} G_{io} \\ o &\Longrightarrow o = o \longrightarrow o + o \longrightarrow o \times i \Longrightarrow o \end{aligned}$$

Le dernier terme est relié à la propagation d'une particule du site i au site o. Or, le chemin qu'elle prend n'est pas spécifié. Alors, on peut très bien imaginer un trajet tel que :

$$i \Longrightarrow o = i \Longrightarrow j \times o \Longrightarrow o$$

où $i \Longrightarrow j$ ne revient jamais au site o. On réécrit alors G_{oo} :

$$\begin{aligned} o &\Longrightarrow o = o \longrightarrow o + o \longrightarrow o \times i \Longrightarrow j \times o \Longrightarrow o \\ G_{oo} &= \widetilde{G}_{oo} + \widetilde{G}_{oo} t_{oi} G_{ij} t_{jo} G_{oo} \end{aligned}$$

ce qui donne directement :

$$G_{oo} = \frac{1}{\widetilde{G}_{oo}^{-1} - t_{oi} G_{ij} t_{jo}}$$