Partie $\underline{IV}$ Fonctions de Green à T finie

23. Résultats principaux $2^{ième}$ quantification

1. Espace de Fock, opérateurs de création-annihilation
    1. Fermions
    2. Bosons
    3. Opérateur nombre
2. Changement de base
    1. $|\vec{r}\rangle$ et $|\vec{k}\rangle$
3. Opérateurs à 1 corps
4. Opérateurs à 2 corps
5. $2^{ème}$ quant. et représentation de Heisenberg

févr. 8-09:37

24. Motivation pour la déf. de la fonction de Green G^R

1. ARPES vs $A(k,\omega)$
2. Déf. de G^R et lien avec précédente
3. Exemple pour H quadratique

25. Représentation d'interaction et produit chronologique

févr. 8-09:46

93.1.3 Fermions

$$a^{+}_{\alpha_i} a_{\alpha_i} \left(a^{+}_{\alpha_j} a^{+}_{\alpha_k} \cdots a^{+}_{\alpha_i} \cdots a^{+}_{\alpha_\ell} \right) |0\rangle$$

$$a^{+} a \, a^{+} = a^{+} \left[1 \pm a^{+} a \right]$$

$$\left[\hat{n}_{\alpha_i}, a^{+}_{\alpha_i} \right] = a^{+}_{\alpha_i} \qquad \left[\hat{n}_{\alpha_i}, a_{\alpha_i} \right] = -a_{\alpha_i}$$

févr. 8-10:02

$$|\alpha_i \alpha_j \ldots\ldots \alpha_k \ldots\ldots\ldots \alpha_l \ldots\ldots \alpha_m\rangle$$

$$= -|\alpha_i \alpha_j \ldots\ldots \alpha_l \ldots\ldots\ldots \alpha_k \ldots \alpha_m\rangle$$

$$a^{+}_{\alpha_i} a^{+}_{\alpha_j} \ldots\ldots a^{+}_{\alpha_k} \ldots\ldots a^{+}_{\alpha_l} \ldots\ldots a^{+}_{\alpha_m}|0\rangle$$

févr. 8-10:06

23.1.2 Bosons

$|\alpha_i\ \alpha_j\rangle = |\alpha_j\ \alpha_i\rangle$

$[a^+_{\alpha_i}, a^+_{\alpha_j}] = 0 = [a_{\alpha_i}, a_{\alpha_j}]$

$[a_{\alpha_i}, a^+_{\alpha_j}] = \delta_{ij}$

$[a^+a, a^+] = a^+aa^+ - a^+a^+a$

$= a^+(1+a^+a) - a^+a^+a$

$= a^+$

$[\hat{n}_{\alpha_i}, a^+_{\alpha_i}] = a^+_{\alpha_i}$

$[\hat{n}_{\alpha_i}, a_{\alpha_i}] = -a_{\alpha_i}$

$a^+_{\alpha_i} a^+_{\alpha_i} a^+_{\alpha_j} \ldots\ldots |0\rangle$

3. Opérateur nombre

"Théorème" sur les commutateurs d'opérateurs d'échelle

Soit $\left[\hat{n}, a^{+}\right] = B\, a^{+}$

Si $|n\rangle$ est état propre de $\hat{n}$, i.e. $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$

Valeur propre.

alors

$$\hat{n}\left(a^{+}|n\rangle\right) = \left(n+B\right)\left(a^{+}|n\rangle\right)$$

Preuve

$$\left(\hat{n}\, a^{+} - a^{+}\hat{n}\right)|n\rangle = B\left(a^{+}|n\rangle\right)$$

$$\left[\hat{n}, a^{+}\right] = B\, a^{+}$$

févr. 8-10:13

$$a^+|n\rangle = C\,|n+1\rangle$$

$$\langle n|aa^+|n\rangle = |C|^2\langle n+1|n+1\rangle$$

$$\langle n|1+a^+a|n\rangle = n+1\ \langle n|n\rangle$$

$$C = \sqrt{n+1}$$

$$|\alpha_i\,\alpha_j\ldots\ldots\alpha_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{\prod_i n_{\alpha_i}!}}\,a^+_{\alpha_i}a^+_{\alpha_j}\cdots a^+_{\alpha_m}|0\rangle$$

$$a^+|0\rangle = |1\rangle$$

$$(a^+)^2|0\rangle = \sqrt{2}\,|2\rangle$$

$$(a^+)^3|0\rangle = \sqrt{3}\sqrt{2}\,|3\rangle$$

23.2 Changement de base.

$$|\mu_m\rangle = \sum_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|\mu_m\rangle$$

$$c^+_{\mu_m} = \sum_i a^+_{\alpha_i}\langle\alpha_i|\mu_m\rangle$$

$$c_{\mu_m} = \sum_i \langle\mu_m|\alpha_i\rangle a_{\alpha_i}$$

Transfo. unitaire

$\Longleftrightarrow$

Transfo. canonique

préserve

anticom.

$$\left[\{c_{\mu_m}, c^+_{\mu_n}\}\right] = \sum_{ij} \langle\mu_m|\alpha_i\rangle \left[\underbrace{\{a_{\alpha_i}, a^+_{\alpha_j}\}}_{\delta_{ij}}\right]\langle\alpha_j|\mu_n\rangle$$

$$= \langle\mu_m|\mu_n\rangle$$

1. Base $|r\rangle$ et $|k\rangle$

Fermeture $\int d^3r \; |r\rangle\langle r| = I$

$$\sum_k |k\rangle\langle k| = I$$

$$\langle r|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ik\cdot r} \qquad \langle k|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-ik\cdot r} \longleftarrow$$

$$\psi^+(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k c_k^+ e^{-ik\cdot r} \qquad \psi(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k e^{ik\cdot r} c_k$$

$$\langle r|r'\rangle = \sum_k \langle r|k\rangle\langle k|r'\rangle = \frac{1}{V}\sum_k e^{ik\cdot(r-r')}$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik\cdot(r-r')} = \delta(r-r')$$

$$\{\psi(r), \psi^+(r')\} = \delta(r-r')$$

$$\langle k|k'\rangle = \int d^3r \; \langle k|r\rangle\langle r|k'\rangle = \frac{1}{V}\int d^3r \; e^{-i(k-k')\cdot r}$$

$$\{c_k, c^+_{k'}\} = \delta_{k,k'}$$

févr. 8-10:25

23.3 Opérateurs à 1 corps

$$\left[V(R_1)+V(R_2)+V(R_3)\right]|r'\rangle|r\rangle|r''\rangle = \left[V(r')+V(r)+V(r'')\right]$$

$|r'\rangle|r\rangle|r''\rangle$

$$\sum_{i=1}^{N} V(R_i)|r,r',r''\dots\rangle = \left(V(r)+V(r')+V(r'')+\dots\right)|r,r',r''\rangle$$

$$\sum_{\mu}^{N} \hat{U}_{\mu}|\alpha_i\,\alpha_j\dots\alpha_k\rangle = \left(U_{\alpha_i}+U_{\alpha_j}+U_{\alpha_k}+\dots\right)|\alpha_i\,\alpha_j\dots\alpha_k\rangle$$

$$= \sum_{m} U_{\alpha_m}\hat{n}_{\alpha_m}|\alpha_i\,\alpha_j\dots\alpha_k\rangle$$

$$\sum_i a^{+}_{\alpha_i} \underbrace{\langle \alpha_i | U | \alpha_j \rangle}_{U_{\alpha_m}} a_j \rightsquigarrow \langle \alpha_i | \mu_m \rangle c_m$$

Base quelconque

$$\boxed{\sum_m \sum_n c^{+}_{\mu_m} \langle \mu_m | U | \mu_n \rangle c_{\mu_n}}$$

Exemples:

$$\int d^3r\, \psi^\dagger(r)\, V(r)\, \psi(r)$$

$$\sum_k c_k^\dagger \langle k| \frac{k^2}{2m} |k\rangle c_k = \sum_k \int d^3r\, \psi^\dagger(r) \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ik\cdot r} \frac{k^2}{2m} \int d^3r' \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-ik\cdot r'} \psi(r')$$

$$= \int d^3r\, \psi^\dagger(r) \left(-\frac{\nabla^2}{2m}\right) \psi(r)$$

févr. 8-10:43

23.4 Opérateurs à 2 corps.

$$V_{r,r'} + V_{r,r''} + V_{r',r''} \cdots \; | r, r', r'' \rangle$$

$$\langle \alpha_1 | \langle \alpha_2 | \quad | \alpha_1 \rangle | \alpha_2 \rangle$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{N} \sum_{\substack{\nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{N} U_{\mu\nu} \quad | \alpha_i , \alpha_j \ldots\ldots \alpha_k \rangle$$

1 2 3   1 2 3

$$\frac{1}{2} \sum_m \sum_n \langle \alpha_m | \langle \alpha_n | \, U \, | \alpha_m \rangle | \alpha_n \rangle \left(\hat{n}_{\alpha_m} \hat{n}_{\alpha_n} - \delta_{mn} \hat{n}_{\alpha_n} \right)$$

$$| \alpha_i \, \alpha_i \, \alpha_i \rangle$$

$$| \alpha_i \, \alpha_j \cdots \alpha_k \rangle$$

$$\frac{1}{2}\int d^3r\, d^3r' \; V(r-r')\Big[\psi^\dagger(r)\,\psi(r)\,\psi^\dagger(r')\,\psi(r') - \delta(r-r')\,\psi^\dagger(r')\,\psi(r')\Big]$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\int d^3r\, d^3r'\, V(r-r')\,\psi^\dagger(r)\,\psi^\dagger(r')\,\psi(r')\,\psi(r)}$$

$$\langle\alpha|\langle\beta|V|\gamma\rangle|\delta\rangle\; c^\dagger_\alpha\, c^\dagger_\beta\, c_\delta\, c_\gamma$$

ordre normal

$$V(R_1 - R_2)\,|r\rangle\,|r'\rangle$$

$$= V(r - r')\,|r\rangle\,|r'\rangle$$

$$\langle r|\,\langle r'|\;V(r-r')\;|r\rangle\,|r'\rangle$$

févr. 8-10:59

23.5 Repr. d'Heisenberg 2nd quant.

$$c_k(t) = e^{iHt}\, c_k\, e^{-iHt}$$

Cas particulier $H = \sum_k \epsilon_k c_k^+ c_k + c^+ c^+ c\, c$

$$i \frac{\partial}{\partial t} c_k(t) = -\left[H, c_k(t)\right] = -\sum_{k'} \epsilon_{k'} \left[\hat{n}_{k'}(t), c_k(t)\right]$$

$$= \epsilon_k c_k(t)$$

$$\boxed{c_k(t) = e^{-i\epsilon_k t}\, c_k}$$

$$[A, BC] = [A, B]C + \underbrace{B[A, C]}_{} = \cancel{(AB - BA)C} + B\cancel{(AC - CA)}$$

$$[A, BC] = \{A, B\}C - \underbrace{B\{A, C\}}_{} = (AB + B\cancel{A})C - B(\cancel{A}C + CA)$$

24. Motiver: G^R N-corps et lien avec avant

$$\langle n| \langle k| \langle 0|_{em} \; - \sum_{k'} \vec{j}_{k'=0} \cdot \vec{A}_{-k'=0} \; |m\rangle \, |0\rangle \, |1_q\rangle_{em}$$

syst. — détect — photon — $q = k' = 0$

syst. -1 ptcle. — détect $k_{\parallel}$

$$\vec{A}_k \propto \left(a_k^+ + a_{-k} \right) \hat{e}_k$$

$$\vec{j}_{k'=0} = -\sum_p e \frac{\vec{p}}{m} c_p^+ c_p$$

$$\propto \boxed{\langle n| c_{k_\parallel} |m\rangle} \left(\langle k| c_{k_\parallel}^+ |0\rangle \frac{\vec{k}_\parallel}{m} \cdot \langle 0| \vec{A} |1_q\rangle_{em} \right)$$

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega\, d\omega} \propto \sum_m \sum_n e^{-\beta K_n} \left| \langle m| c_{k_\parallel} |n\rangle \right|^2 \delta\left(\omega - (K_m - K_n)\right)$$

e^{iKt} — e^{-iKt}

Car réponse à diffusion électron $c_{k_\parallel} \rightarrow f_k$

$$\boxed{K_n = E_n - \mu N_n}$$

$$\int dt\, e^{i(\omega - K_m + K_n)t}$$

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega\, d\omega} \propto \int dt\, e^{i\omega t} \langle c_{k_\parallel}^+ c_{k_\parallel}(t) \rangle \propto A(k,\omega) f(\omega)$$

24.2 Déf. Green N-corps:

$$\langle r|\hat{G}^R(t)|r'\rangle = -i\langle r|e^{-iH(t-t')}|r'\rangle\,\theta(t-t')$$

$$\psi(r',t') = \int d^3r\, G^R(r',t';r,t)\,\psi(r,t)$$

"Tentation"

$$\langle\Omega|G^R_{(t-t')}|\Omega\rangle = -i\langle\Omega|\psi(r)\,e^{-iH(t-t')}\,\psi^+(r')|\Omega\rangle\theta(t-t')$$

fond. fond.

Si $H|\Omega\rangle = 0$

$$\psi^+(r',t') = e^{iHt'}\psi^+(r')e^{-iHt'}$$

$$= -i\langle\Omega|\psi(r,t)\psi^+(r',t')|\Omega\rangle\theta(t-t')$$

~~Pas géniale~~

À la place $[\ \ ,\ \ ]$ Bosons

$$\boxed{G^R(r,t;r',t') = -i\langle\{\psi(r,t),\psi^+(r',t')\}\rangle\,\theta(t-t')}$$

moyennes thermiques

Cas à 1 seule particule: $H = \sum_n E_n a^+_n a_n$

$$\psi(r,t) = \sum_n \langle r|n\rangle a_n(t) = \sum_n \varphi_n(r)\,a_n\,e^{-iE_nt}$$

$$\psi^+(r',t') = \sum_m a^+_m(t')\langle m|r'\rangle = \sum_M \varphi^*_m(r')\,a^+_m\,e^{iE_mt'}$$

$$\{\psi(r,t),\psi^+(r',t')\} = \sum_n \varphi_n(r)\varphi_n^*(r')\,e^{-iE_n(t-t')}$$

$$G^R(r,t;r',t') = -i\sum_n \varphi_n(r)\varphi^*_n(r')e^{-iE_n(t-t')}\,\theta(t-t')$$

$$\int d(t-t')\,G^R e^{i\omega(t-t')} = \sum_n \frac{\varphi_n(r)\varphi_n^*(r')}{\omega+i\eta-E_n} = G^R(\omega)$$