

## 5. Gaz de Coulomb

① Règles de Feynman pour  
inter. à 2 corps.

1. Hamiltonien, déf.

2. Position

3. Réciproque

4. Règles pour  $\Sigma$

5. Principe de Pauli;

② Diélectrique.

③ Formels

④ H.F. vs  $m^*$

## 5.1 Règles de Feynman.

1. H. et def.

---

$$H_0 = \frac{1}{2m} \int d^3r \sum_{\sigma} \nabla \Psi_{\sigma}^{\dagger}(r) \cdot \nabla \Psi_{\sigma}(r)$$

$$V_n = - \int d^3r \sum_{\sigma} \Psi_{\sigma}^{\dagger}(r) \Psi_{\sigma}(r) \int d^3r' \mathcal{N}(r-r')$$

$$\mathcal{N}(r-r') = \frac{e^2}{|r-r'|}$$

$$V = \int d^3r d^3r' \sum_{\sigma \sigma'} \Psi_{\sigma}^{\dagger}(r) \Psi_{\sigma'}^{\dagger}(r') \Psi_{\sigma'}(r') \Psi_{\sigma}(r) \mathcal{N}(r-r')$$

Calculer

$$\langle O \rangle \equiv \frac{\text{Tr} [e^{-\beta K_0} O]}{\text{Tr} [e^{-\beta K_0}]}$$

$$g_{\sigma_1 \sigma_2}(r_1, \tau_1; r_2, \tau_2)$$

$$= - \frac{\langle \text{Tr}_\tau [\hat{U}(\beta, 0) \hat{\Psi}^\dagger(r_1, \tau_1) \hat{\Psi}(r_2, \tau_2)] \rangle}{\langle \text{Tr}_\tau \hat{U}(\beta, 0) \rangle}$$

$$\langle \text{Tr}_\tau \hat{U}(\beta, 0) \rangle$$

$$\hat{U}(\beta, 0) = \mathcal{T}_\tau e^{-\int d\tau \hat{V}(\tau)}$$

$$\hat{V}(\tau) = e^{k\tau} \iint \psi^\dagger \psi^\dagger \psi \psi e^{-k\tau}$$

*(Handwritten notes: A green circle highlights the exponential terms. Red annotations include  $e^{-k\tau}$ ,  $e^{k\tau}$ , and  $\psi^\dagger \psi$  with a red arrow pointing to the  $\psi^\dagger \psi$  term.)*

$$\int d\tau_1 \hat{V}(\tau_1)$$

$$= N(1, 2)$$

$$N_{\sigma_1 \sigma_2}(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) = \frac{e^2}{|x_1 - x_2|} \delta(\tau_1 - \tau_2)$$

$$-\int d\tau_1 d\tau_2 \int d^3x_1 d^3x_2 \sum_{\sigma_1 \sigma_2}$$

$$\hat{\Psi}_{\sigma_1}^{\dagger}(x_1, \tau_1) \hat{\Psi}_{\sigma_2}^{\dagger}(x_2, \tau_2) N(x_1, \tau_1; x_2, \tau_2) \hat{\Psi}_{\sigma_2}(x_2, \tau_2) \hat{\Psi}_{\sigma_1}(x_1, \tau_1)$$

$$| \rightarrow (x_i, \tau_i, \sigma_i)$$

$$\int_i \rightarrow \int d^3x_i \int_0^\beta d\tau_i \sum_{\sigma_i}$$

$$\hat{U}(\rho, \sigma) = T_\tau \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_1^2 \int_1^2 V(1,2) \Psi^\dagger(1) \Psi^\dagger(2) \Psi(2) \Psi(1) \right]$$

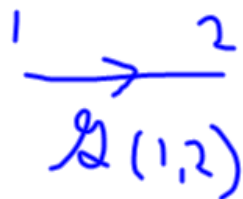
$$\Psi(1) \equiv \hat{\Psi}_{\sigma_1}(x_1, \tau_1)$$

## S.1.2 Diagrammes de Feynman dans l'espace des positions

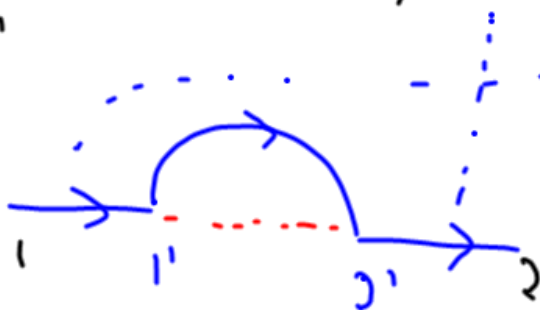
$$\mathcal{G}(1,2) = - \langle T_c [U(\beta,0) \psi(1) \psi^\dagger(2)] \rangle_c$$

Premier ordre:

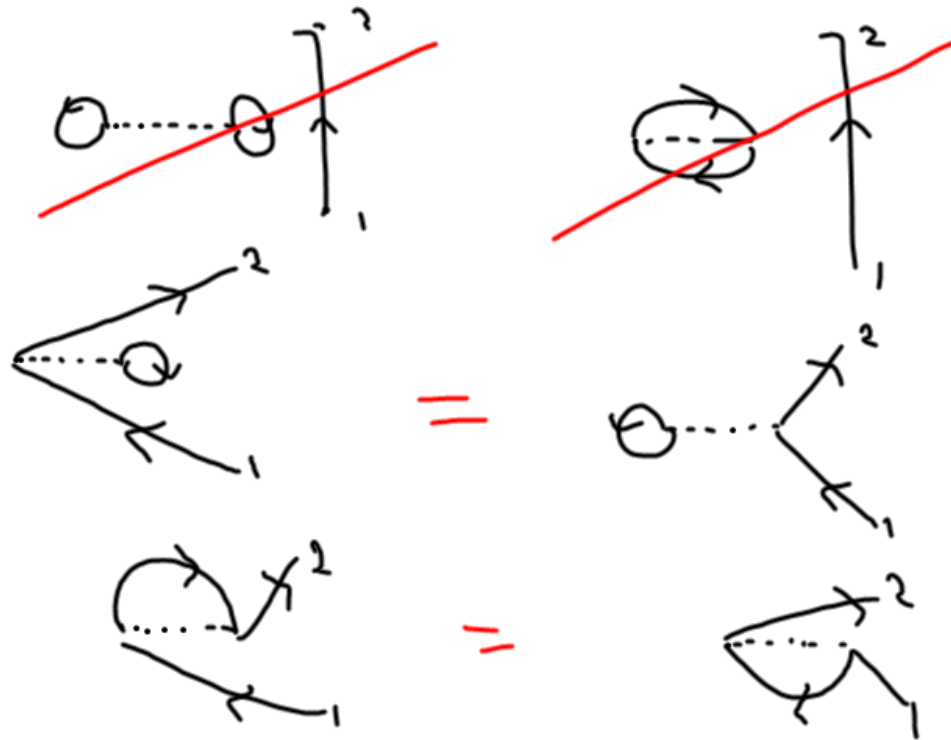
$$- \langle T_c \left[ -\frac{1}{2} \int_{1'}^{2'} \int_{1''}^{2''} v(1',2') \psi^\dagger(1') \psi^\dagger(2') \psi(2') \psi(1') \right] \psi(1) \psi^\dagger(2) \rangle_c$$



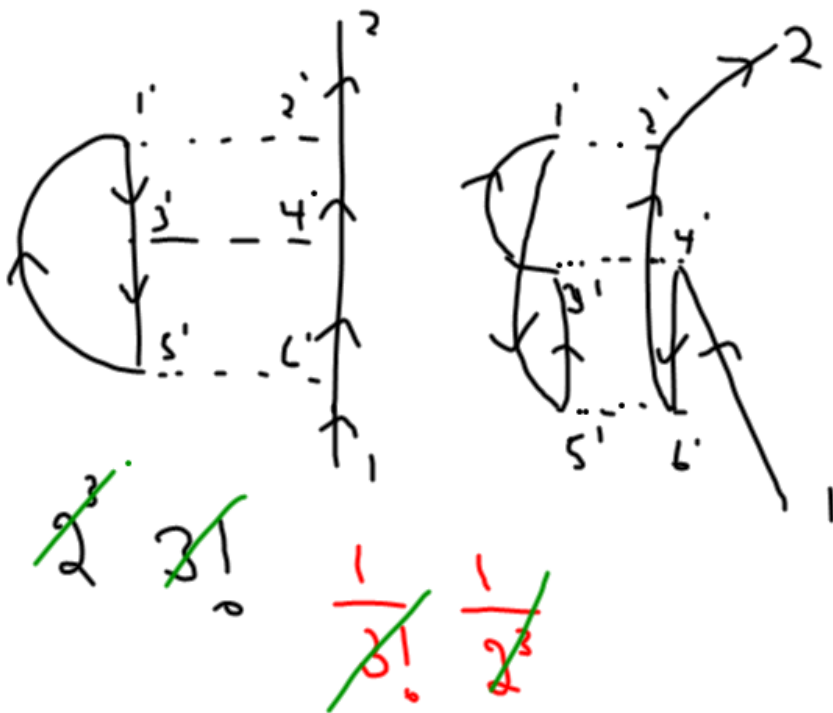
$$-\frac{1}{2} \int_{1''}^{2''} \int_{1''}^{2''} v(1',2') \mathcal{G}(1',2') \mathcal{G}(2',2) \mathcal{G}(1,1'')$$



Exemple, premier ordre



0





1. Dessinez pts  $1$  et  $2$  <sup>à l'origine</sup>  
et  $n$  lignes pointillées  
Joindre vertex et pts extérieurs  
avec des lignes orientées  
de telle sorte que chaque  
vertex a une ligne qui entre  
et une ligne qui sort, avec  
une ligne qui part de  $1$  et une  
qui finit à  $2$ .

i) Connexes

ii) Topologiquement  
distinct

2. À chaque vertex  
on associe un indice muet.  
 $(x, \tau, \sigma)$
3. Associer  $\mathcal{Q}$  à chaque ligne.
4. Associer  $V(i, j)$  à chaque  
ligne pointillée.
5. Intégrer sur tous les indices  
muets.
6. Associer  $(-1)^n (-1)^F \mathcal{Q}^F$  à  
chaque diagramme où  $n$  est  
l'ordre et  $F$  le # de  
boucles de fermions.

7.



$$\mathcal{Q}(1, 2^+) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \mathcal{Q}(x, \tau; x, \tau + \eta)$$

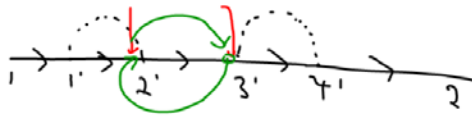
Signe

$$(-1)^n < T_{\tau} \left[ \int_{1'} \int_{2'} \dots \int_{2n-1} \int_{2n} \right]$$

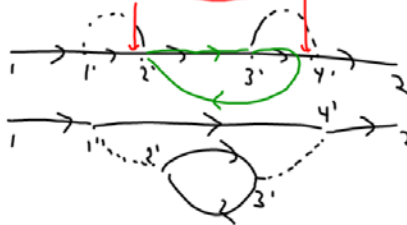
$$\psi^+(1') \psi(1') \psi^+(2') \psi(2') \psi^+(3') \psi(3')$$

$$\dots \psi^+(2n-1) \psi(2n-1) \psi^+(2n) \psi(2n) \psi(1) \psi^+(2)$$

$$\neq (-1)^n (-1)^{2n-1} (-1)^2 = (-1)^{1+n+n-1+1} = (-1)^n$$



$$\psi^+ (\psi^+ \psi^+ \psi^+ \dots) \psi^+ \quad (-1)^p (-1) \quad (-1)^p$$

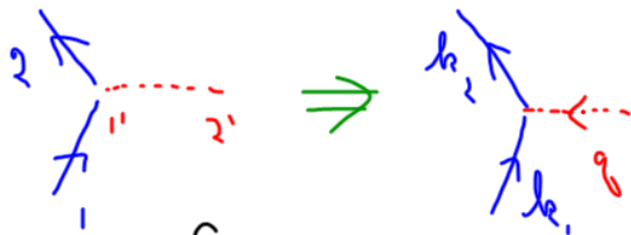


### 5.1.3 Dans l'espace réciproque

$$\mathcal{Q}_\sigma(k) = \int d(x_1 - x_2) \int_0^\beta d(\tau_1 - \tau_2) e^{-i\vec{k} \cdot (x_1 - x_2)} e^{ik_n(\tau_1 - \tau_2)} \mathcal{Q}(1, 2)$$

$$k = (\vec{k}, ik_n)$$

$V(q)$  analogue sauf pour  $q_n = 2n\pi T$



$$\mathcal{Q}_\sigma(1-2) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_n e^{i\vec{k} \cdot (x_1 - x_2) - ik_n(\tau_1 - \tau_2)} \mathcal{Q}_\sigma(k)$$

$$\int d^3 x_{11} e^{ik_1 \cdot (-x_{11})} e^{ik_2 \cdot x_{11}} e^{iq \cdot (-x_{11})} = (2\pi)^3 \delta(-k_1 + k_2 - q)$$

$$\int_0^\beta d\tau_{11} e^{+ik_{1n}\tau_{11}} e^{-ik_{2n}\tau_{11}} e^{+iq_n\tau_{11}} = \beta \delta_{k_{1n} - k_{2n} + q_n, 0}$$

1. Diagrammes

2. Associer direction de  $q$   
aux .....

Conserver  $k_e$  et  $k_n$  à chaque  
vertex.

3. 
$$g^0(k) = \frac{1}{i\hbar_n - (\epsilon_{k_2} - \mu)} \quad \xrightarrow{k}$$

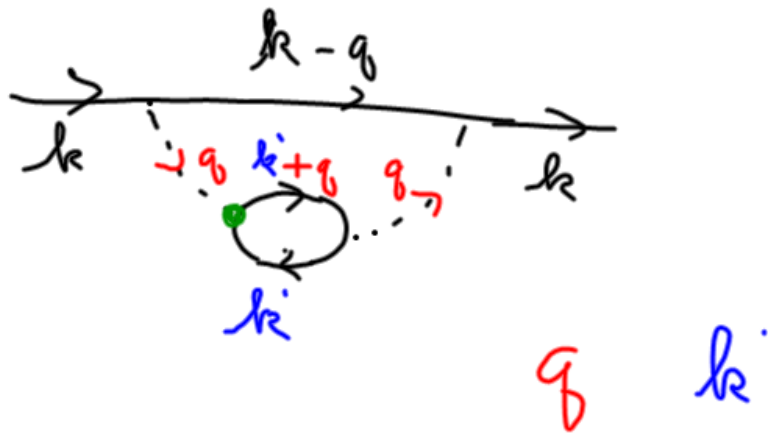
4. ....  $V(q)$

5. 
$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_n$$
 pour chaque  $k$   
not fixe par  
conservation

6. Somme sur spin.

7.  $(-1)^n (-1)^F$

8. ...  $\bigcirc$  facteur de convergence =  $e^{i\hbar_n}$



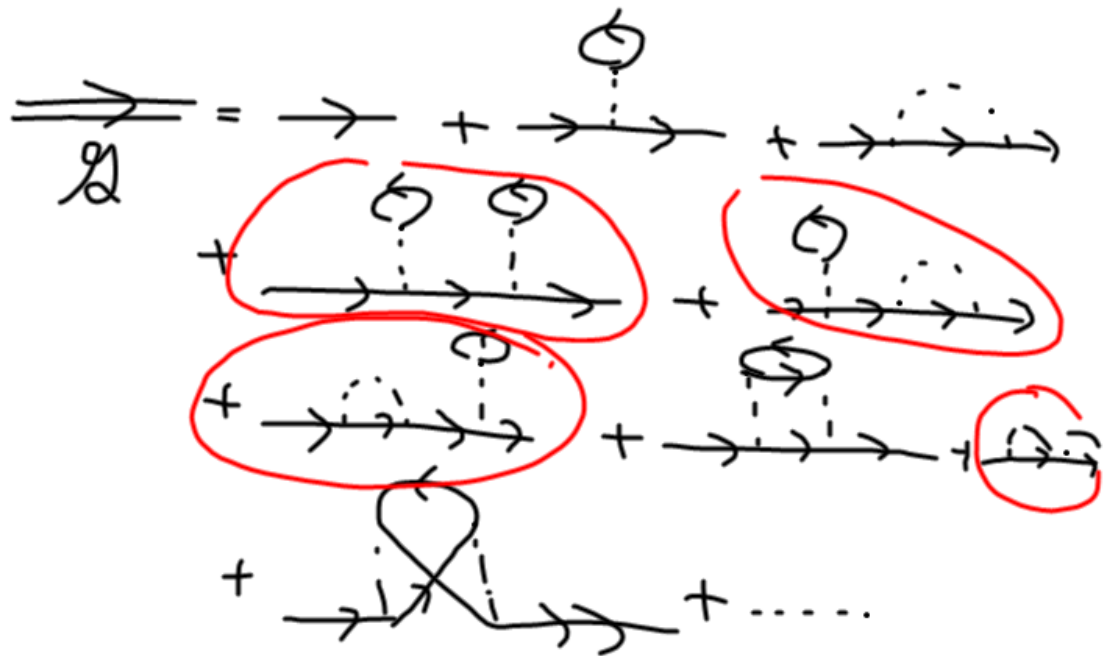
### 5.1.4. Self-énergie:

$$\mathcal{Q}(k) = \mathcal{Q}^0(k) + \mathcal{Q}^1(k) \dots \mathcal{Q}^n(k) +$$

.....

$\text{Im } G^R$  parfois + parfois -

$$\text{Im} \frac{1}{(\omega + i\eta - \epsilon_k)^2} = -\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Im} \frac{1}{\omega + i\eta - \epsilon_k}$$



$\Sigma$  "propre" ou "irréductible"



$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_0 \Sigma \mathcal{G}$$

$$= \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_0 \Sigma \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_0 \Sigma \mathcal{G}_0 \Sigma \mathcal{G}_0 + \dots$$

$\Sigma$  = Somme des diagrammes  
qui ne peuvent être séparés  
en deux en coupant une ligne  $\rightarrow$





Viole principe  
de Pauli  
lorsque

$$k' + q = k - q$$