$$\hat{G}(t) = -i\, e^{-iHt}\, \theta(t)$$

$$\hat{G}^R(\omega) = \frac{1}{\omega + i\eta - H} \equiv (\omega + i\eta - H)^{-1}$$

$$\langle r | \hat{G}^R(\omega) | r' \rangle = \sum_{n n'} \langle r | n \rangle \langle n | \frac{1}{\omega + i\eta - E_n} | n' \rangle \langle n' | r' \rangle$$

$|n\rangle$ = état propre de H

$$= \sum_n \frac{\langle r | n \rangle \langle n | r' \rangle}{\omega + i\eta - E_n} = \sum_n \frac{\Psi_n(\vec{r})\, \Psi_n^*(\vec{r}')}{\omega + i\eta - E_n}$$

$$\mathrm{Im}\, G^R(k, k; \omega) = -\pi \sum_n \Psi_n(k)\, \Psi_n^*(k)\, \delta(\omega - E_n)$$

$$G^R(r, r'; \omega) = \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{-2\,\mathrm{Im}\, G^R(r, r'; \omega')}{\omega + i\eta - \omega'}$$

$$\frac{1}{\omega + i\eta - \omega'} \underset{\omega \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\omega\left(1 - \frac{\omega'}{\omega}\right)} \sim \frac{1}{\omega}\left(1 + \frac{\omega'}{\omega} + \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 + \dots\right)$$

3.3 Théorie des perturbations.

- Général
- Feynman (bébé)
- Dyson + Self-énergie irréduct.ble.

3.4 Prop. formelles de la Σ

3.5 Electrons dans pot. aléatoire.

- Moyenne sur désordre.
- Th. des pert.

3.6 Techniques de resommation.

3.3 Perturbations.

$$H = H_0 + V$$

Connu

$$\hat{G}^R(\omega) = \frac{1}{\omega + i\eta - H} \qquad \hat{G}_0^R(\omega) = \frac{1}{\omega + i\eta - H_0}$$

$$(\omega + i\eta - H_0 - V)\,\hat{G}^R = 1$$

$$\boxed{G_0^{R^{-1}}(\omega)\,\hat{G}^R(\omega) = 1 + V\,\hat{G}^R(\omega)}$$ Lipmann Schwinger

$$\boxed{G^R(\omega) = G_0^R(\omega) + G_0^R(\omega)\,V\,G^R(\omega)}$$

$$G^R(\omega) = G_0^R(\omega) + G_0^R(\omega)\,V\,G_0^R(\omega)$$

$$+ G_0 V G_0 V G_0 + \dots \dots$$

$$\frac{1}{X+Y} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X}Y\frac{1}{X+Y} \Rightarrow G = G_0 + G_0 V G$$

$$1 = \frac{1}{\cancel{X}}(\cancel{X}+Y) - \frac{1}{X}Y$$

$$= 1$$

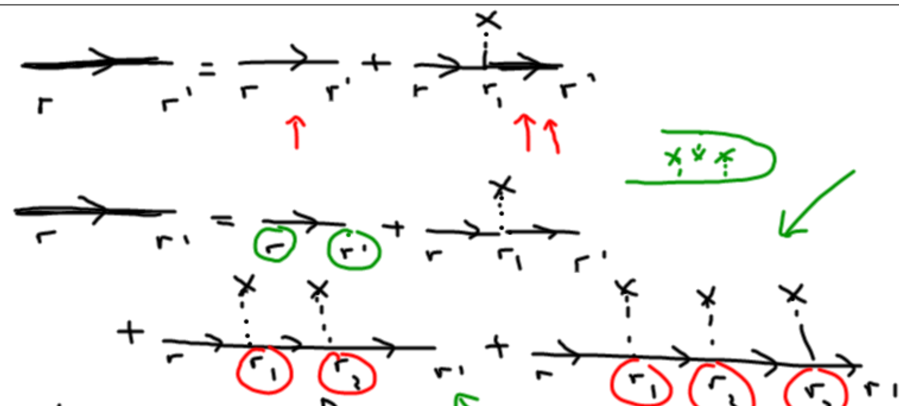
- Feynman

$$G^R = G_0^R + G_0^R V G^R$$

$$\langle r | G^R | r' \rangle = \langle r | G_0^R | r' \rangle$$

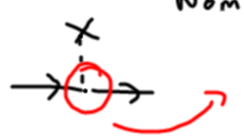
$$+ \int dr_1 \quad \langle r | G_0^R | r_1 \rangle \langle r_1 | V | r_1 \rangle \langle r_1 | G^R | r' \rangle$$

$$\langle r_1 | V | r_2 \rangle = \delta(r_1 - r_2)\, V(r_1)$$



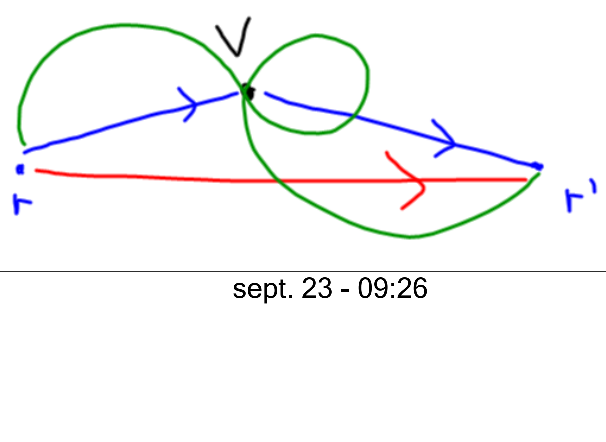
- Lignes → $\langle r|G_0^R(\omega)|r'\rangle$
- X $V(r_1)$
- Aller de r à r' avec G_0^R connectés par

Nombre arbitraire de fois

-  Vertex

- Intégrer sur toutes les variables "intermédiaires"
- Début $|r\rangle$, fin $|r'\rangle$ pas intégrés
- Sommer sur tous les diag. formés de propagateurs libres diffusent sur le potentiel

  Tous les diagrammes topologiquement différents



Espace réciproque

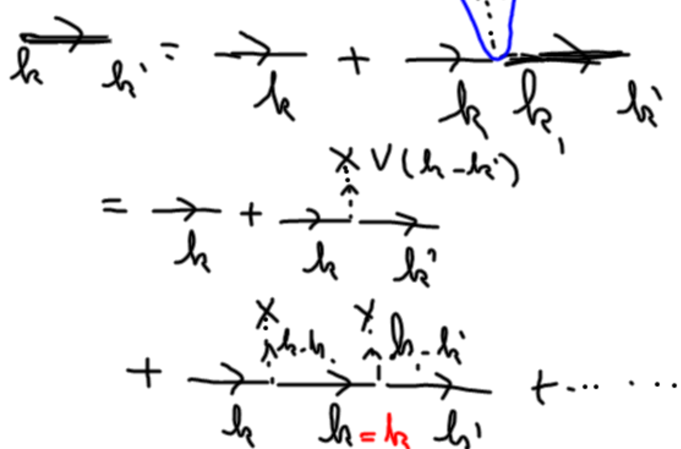
$$\langle k|\hat{G}_0^R(\omega)|k'\rangle = \frac{1}{\omega + i\eta - \frac{k^2}{2m}}\langle k|k'\rangle$$

$$\langle k|\hat{G}^R(\omega)|k'\rangle$$

$$= G_0^R(k,\omega)\langle k|k'\rangle$$

$$+ \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\, G_0^R(k,\omega)\langle k|V|k_1\rangle\langle k_1|G^R(\omega)|k'\rangle$$

$$\hat{G}^R = G_0^R + G_0^R V G^R$$



$$\langle k|V|k'\rangle = \int dr_1\, dr_2\, \langle k|r_1\rangle\langle r_1|V|r_2\rangle\langle r_2|k'\rangle$$

$$= \int dr_1\, \langle k|r_1\rangle V(r_1)\langle r_1|k'\rangle =$$

$$= \int dr_1\, \frac{e^{-ikr_1}}{\sqrt{V}}\, V(r_1)\, \frac{e^{+ik'r_1}}{\sqrt{V}}$$

$$= V(k-k')$$

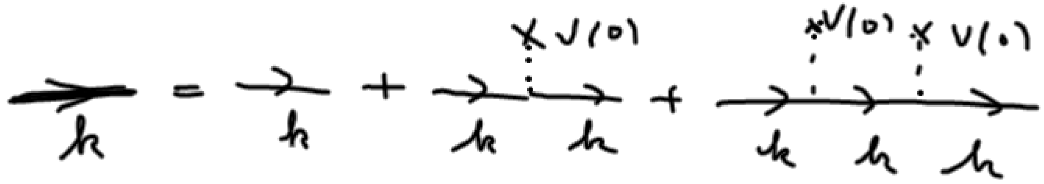
Eq. de Dyson + Self-énergie

$$\langle k|G^R|k\rangle = \langle k|k\rangle G_0^R(k,\omega) + G_0^R(k,\omega)\langle k|V|k\rangle G_0^R(k,\omega)\langle k|k\rangle$$

$$\frac{V}{\omega+i\eta-\frac{k^2}{2m}}$$

$$\mathrm{Im}\,\frac{1}{\left(\omega+i\eta-\frac{k^2}{2m}\right)^2} = -\mathrm{Im}\,\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{1}{\left(\omega+i\eta-\frac{k^2}{2m}\right)}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\omega}\left[-\pi\,\delta\left(\omega-\frac{k^2}{2m}\right)\right]$$



$$+ \cdots$$

$$= G^0_R + G^0_R V G^0_R + G^0_R V G^0_R V G^0_R$$

$$+ \cdots$$

$$= \frac{1}{G_0^{R-1} - V}$$

$$= \frac{G_0^R}{1 - V G_0^R}$$

$$\frac{\langle k | k \rangle}{\omega + i\eta - \frac{k^2}{2m} - \langle k | V | k \rangle}$$

Causal

Pôles simples

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \, \omega \, T_r \left[-2 I_m G^R \right] = T_r \left[H \right]$$

Inclure les autres termes !

Formelle: $\langle k|G^R(\omega)|k\rangle = \dfrac{\langle k|k\rangle}{G_0^{-1}(k,\omega) - \Sigma^R(k,\omega)}$

$$\boxed{\langle k|\hat{G}^R(\omega)|k\rangle = G_0^R(k,\omega)\langle k|k\rangle + G_0^R(k,\omega)\,\Sigma^R(k,\omega)\,\langle k|\hat{G}^R(\omega)|k\rangle}$$

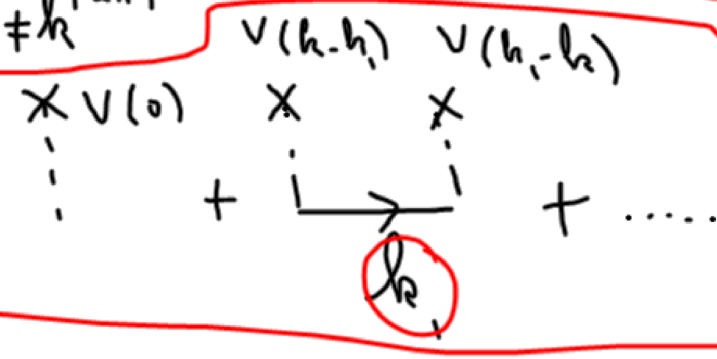
Dyson

$\Sigma^R(k,\omega)$ contient tous les diagrammes qui ne peuvent pas être coupés en deux en enlevant $G_0^R(k,\omega)$

$\Sigma^R(k,\omega) = \langle k|V|k\rangle$ au premier ordre en V

2ème ordre: $\displaystyle\int_{k_1 \neq k} \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \underbrace{\langle k|V|k_1\rangle}_{V(k-k_1)} G_0^R(k_1,\omega) \underbrace{\langle k_1|V|k\rangle}_{V(k_1-k)}$

$\Sigma^R(k,\omega) =$



$\Sigma^R(k,\omega)$ = self-énergie irréductible.

Diagr. ne peuvent pas être divisé en deux en coupant un $G_0^R(k,\omega)$

3.4 Prop. formelles

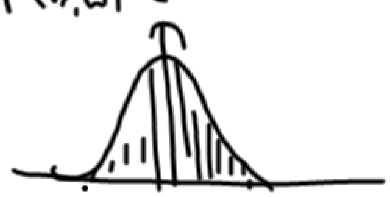
$\Sigma^R(k,\omega) \to$ analytique dans demi-plan sup.

$\to \mathrm{Im}\,\Sigma^R < 0$ causalité

Pôles :

$$\boxed{\omega - \frac{k^2}{2m} - \mathrm{Re}\,\Sigma^R(k,\omega) = 0}$$

$A(k,\omega)$ (réelle)



Par exemple:

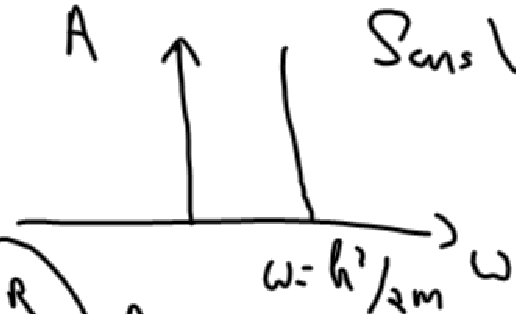
Soit $\Sigma^R(k,\omega) = a - \frac{i}{\tau}$

$$G^R(k,\omega) = \frac{\langle k|k\rangle}{\underbrace{\omega - \frac{k^2}{2m} - a}\, + i/\tau}$$

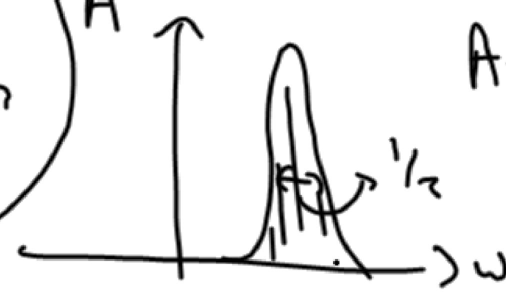
$$G^R(k,t) = i\,\theta(t)\, e^{-i\left(\frac{k^2}{2m}+a-\frac{i}{\tau}\right)t}$$

$$= i\,\theta(t)\, e^{-i\left(\frac{k^2}{2m}+a\right)t - t/\tau}$$

Sans V k est bon nombre quantique.



Avec V



$$\int \omega^2 \, \mathrm{Im}\, G^R \propto \mathrm{Tr}\, H^2$$

3.5 Électron dans potentiel aléatoire

$$V_c(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N_i} v(\vec{r} - \vec{R}_i)$$

$$V_c(\vec{q}) = \int d^3r\, e^{-iq\cdot r} \sum_{i=1}^{N_i} v(r - R_i)\, \overbrace{e^{iq\cdot R_i}\, e^{-iq\cdot R_i}}^{1}$$

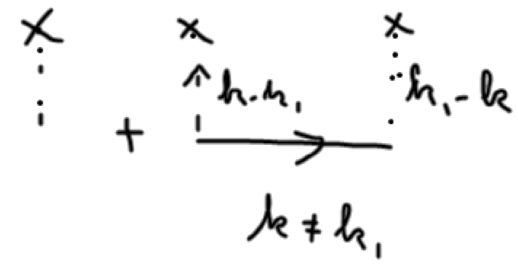
$$= \sum_{i=1}^{N_i} v(q)\, e^{-iq\cdot R_i}$$

$$\overline{V_c(q)} = v(q) \sum_{i=1}^{N_i} \overline{e^{-iq\cdot R_i}}$$

$$= v(q) \sum_{i=1}^{N_i} \frac{1}{V} \int d^3R_i\, e^{-iq\cdot R_i}$$

$$= v(q)\, \frac{N_i}{V}\, (2\pi)^3\, \delta(q)$$

$$= n_i\, v(q)\, (2\pi)^3\, \delta(\vec{q})$$

$\Sigma^R(k,\omega) =$ 

$$= n_i v(0) + n_i \int_{k\neq k_1} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} G_0^R(k,\omega) \, |v(k-k_1)|^2$$

$$\overline{V_c(q)V_c(q')} = \sum_{i=1}^{N_i}\sum_{j=1}^{N_i} v(q)v(q') \, \overline{e^{-iq\cdot R_i} \, e^{-iq'\cdot R_j}}$$

$$= \sum_{i=1}^{N_i} v(q)v(q') \, \overline{e^{-i(q+q')\cdot R_i}}$$

$$= n_i \quad v(q)v(-q)(2\pi)^3 \delta(q+q')$$

$$\mathrm{Im}\left[\int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega + i\eta - \frac{k_1^2}{2m}} |v(k-k_1)|^2\right]$$

$$-\pi \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \delta\left(\omega - \frac{k_1^2}{2m}\right) |v(k-k_1)|^2$$