Le Démon de Maxwell

David Poulin

Décembre 1999

Département de Physique
Université de Sherbrooke

Table des matières

Introduction 3

La naissance du Démon de Maxwell, un préambule 4

- La chaleur 4
- Efficacité des machines thermiques 5
- L'édifice thermodynamique 5
- Démon de Maxwell 6

L'exorcisme du Démon de Maxwell 8

- Interprétation probabiliste de la deuxième loi 8
- Démons mécaniques 9
- La mesure 10
- La naissance d'une nouvelle science, l'exorcisme parfait 11
- Le mariage de deux sciences 13
- Machine de Turing universelle 15
- L'irréversibilité logique 17
- Les calculs réversibles 19
- On mélange bien le tout et on laisse reposer 20
- La complexité algorithmique 22
- L'asymétrie du temps 25
- Et le reste 26

Références 27

David Poulin
Département de physique
Université de Sherbrooke

Le Démon de Maxwell

Le Démon de Maxwell est un être purement fictif imaginé en 1871 par le physicien écossais James Clerk Maxwell afin de mettre à l'épreuve la seconde loi de la thermodynamique. Je propose ici un historique de l'évolution du Démon depuis sa plus tendre enfance jusqu'à sa toute récente mort, s'il est mort ! L'importance d'une telle étude se reflète dans l'étendue des sujets qu'elle couvre : la thermodynamique, la physique statistique, les probabilités, la théorie de l'information, le problème de la mesure en mécanique quantique, la flèche du temps et la complexité algorithmique.

Parallèlement à cet historique, je montre comment l'étude du Démon a profité à la science, tant au niveau de l'introduction de nouveaux concepts en physique qu'en la compréhension plus profonde du monde qui nous entoure et des lois que nous utilisons pour le décrire. Inversement, j'indiquerai comment l'évolution scientifique apporte de nouveaux éléments de réponse à l'énigme de Maxwell. Souvent, le problème a été mis de côté, parce qu'on le croyait résolu ou simplement par épuisement, jusqu'à ce qu'une nouvelle théorie scientifique fasse son apparition et qu'un individu ai le génie ou la chance de l'appliquer au problème du Démon.

En conséquence de ce vaste étendu du problème, cet essai peut paraître, à première vue, un peu décousu. Ce n'est qu'en le considérant dans son ensemble qu'on parvient à comprendre toutes les interconnections entre les différents sujets. Parfois ces connections sont explicites mais d'autres fois elles sont de nature plus subtiles et nécessitent un certain recul. Ainsi, le lecteur non initié trouvera certains passages un peu difficiles alors que le lecteur initié sera choqué que le sujet n'ai pas été poussé plus à fond. C'est donc pour satisfaire les curieux qu'une référence générale est donnée au début de chaque section.

La première partie de cet essai relate les événements entourant l'établissement de la thermodynamique. Ceux-ci précèdent la naissance du Démon mais sont *indispensables à sa conception*; sans thermodynamique, il n'y a pas de loi à enfreindre. J'y ferai ressortir le caractère empirique de la seconde loi: le concept d'entropie auquel elle se réfère n'a, à cette époque, aucune signification outre sa définition opérationnelle. C'est en essayant d'éclaircir cette situation que Maxwell donna naissance à son Démon. À la fin de la première partie, j'énoncerai clairement ce qu'est le Démon de Maxwell et en donnerai quelques exemples.

En seconde partie, je dresse la liste des moyens employés afin d'expliquer comment la seconde loi peut survivre à l'attaque de Maxwell. Évidemment, il n'y a qu'une vraie réponse à cette question. Néanmoins, elle n'est pas l'œuvre d'un seul individu mais le rassemblement d'idées issues des nombreux savants qui, de proche ou de loin, se sont attaqués au Démon. Malgré qu'elle soit de nature empirique et déduite de l'expérience, la seconde loi a des conséquences à des niveaux très fondamentaux de la physique, comme je le ferai ressortir en seconde partie.

La naissance du Démon de Maxwell, un préambule

Malgré que plusieurs personnes ont tenté d'expliquer ce qu'est la chaleur et comment elle se propage, nous ne remonterons pas le temps plus que nécessaire pour les besoins de notre cause. Brossons simplement le portrait de la thermodynamique présente à la fin du XVIIIe siècle. C'est le père de la chimie moderne Antoine Lavoisier qui fait autorité à cette époque avec sa théorie du calorique. Selon cette théorie, la chaleur est un fluide, le *calorique*, qui s'écoule entre les «atomes» formant la matière et qui, comme les particules transportant le courant électrique, a tendance à se repousser. Bien que très naïve, cette théorie réussit à expliquer un grand nombre de phénomènes : la chaleur a naturellement tendance à se déplacer d'un corps chaud vers un corps froid; le volume d'un objet est directement proportionnel à sa capacité à contenir de la chaleur; plus un corps contient de la chaleur plus celle-ci se repousse, donc le corps se dilate; la friction compresse les corps en frottement ce qui oblige le calorique à s'écouler le long de leur interface; etc.

On connaît depuis un siècle les machines à vapeur, mais ces dernières sont très peu efficaces; elles utilisent environ 6% de l'énergie libérée par la combustion. Plusieurs tentent d'augmenter cette efficacité en procédant par essai et erreur, mais on ne sait pas si de telles machines possèdent une limite d'efficacité. L'impossibilité de construire une machine à mouvement perpétuel est généralement acceptée en raison du si grand nombre d'échecs survenus par le passé. Cette observation est en fait une des plus fondamentales de toute la physique.

Dans la présente partie, nous allons relater les événements qui ont conduit à la naissance de la thermodynamique. Notons que ceci ne constitue pas un historique de la thermodynamique, mais seulement contient les éléments indispensables à notre étude du Démon.

La chaleur [1, 24]

C'est en perçant des canons pour la défense de Munich en 1797 que l'américain Benjamin Thompson apporta une nouvelle interprétation de la chaleur. Afin de produire ces canons, on moulait d'abord la fonte sous forme de cylindre creux imparfait que l'on perçait par la suite à l'aide de mèches de fer. Ces mèches étaient activées par des chevaux qui communiquaient leur mouvement par l'intermédiaire d'un système d'engrenage. Dans le but de mieux comprendre la nature de la chaleur produite par friction, Thompson, plus tard connu sous le nom du comte Rumford, émergea le canon dans un bassin d'eau et remplaça la mèche coupante par une mèche usée. Il nota alors que tant que les chevaux fournissent le mouvement à la mèche, l'eau se réchauffe jusqu'à ébullition, peu importe la quantité d'eau initialement comprise dans le bassin.

Évidemment, la quantité de calorique contenue dans la mèche et dans le cylindre se devait d'être finie. Comment se peut-il alors que la chaleur fournie par leur friction puisse être illimitée et ne donne aucun signe de diminution avec le temps ? Rumford en tira cette conclusion :

> It is hardly necessary to add, that anything which any insulated body [...] can continue to furnish without limitation, cannot be a material substance; and it appears to me to be extremely difficult, if not quite impossible, to form any distinct idea of anything capable of being excited and communicated in the manner the heat was excitedand communicated in these experiments, except it be motion. [22]

Il était déraisonnable de supposer qu'une source illimitée de calorique ait pu être initialement contenue dans la fonte ou dans le fer; en particulier, ce calorique aurait fait fondre le fer. La seule source fournissant quelque chose de constant au cours des expériences était les chevaux et cette chose était le mouvement.

En fait, Rumford n'était pas le premier à suggérer que la chaleur puisse être du mouvement, il était le premier à en fournir une preuve. Dès 1600, Francis Bacon avait émis l'hypothèse que la chaleur puisse être un mouvement. Néanmoins, avec la théorie de Newton bien en place, la physique était plus adaptée à l'étude de la chaleur en tant que mouvement à l'époque de Rumford que deux siècles auparavant.

Efficacité des machines thermiques [1, 24, 27, 21]

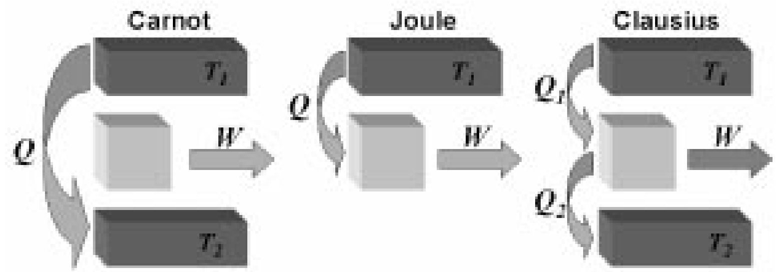
Malgré l'évidence de ses conclusions, les travaux de Rumford sont ignorés pendant près de 50 ans. D'ailleurs, vers 1830, Sadi Carnot fonde ses travaux sur deux hypothèses fondamentales, soit en l'impossibilité de construire une machine à mouvement perpétuel et la notion de calorique. Carnot tente de comprendre le fonctionnement des machines à vapeur en faisant abstraction de la conception matérielle de la machine. Il sait cependant que toute machine thermique comporte deux éléments essentiels : un réservoir chaud et un réservoir froid. La force motrice des machines à vapeur provient de *la chute du calorique* du réservoir chaud vers le réservoir froid. Tout comme un moulin à eau ne consomme pas d'eau, la machine thermique ne consomme pas de calorique. Carnot est le premier à comprendre que l'efficacité maximale d'une machine thermique est atteinte lorsque son fonctionnement est fait de façon *réversible.* En d'autres termes, une machine à vapeur idéale ne diffère d'un réfrigérateur idéal que par le sens d'écoulement du temps.

Les idées de Carnot passent sous silence pendant une longue période, en partie puisqu'il commence à accepter les conclusions de Rumford, donc à douter d'une de ses hypothèses de base. D'ailleurs, quelques années plus tard, il estime l'équivalent mécanique de la chaleur, idée inconcevable sous le régime de Lavoisier. En quelque sorte, Carnot connaît les deux premières lois de la thermodynamique, mais est incapable de les comprendre en raison de ses fausses hypothèses.

L'édifice thermodynamique [1, 24, 27, 21]

Viennent ensuite les expériences de Joule sur l'équivalent mécanique de la chaleur, vers 1841. Ces expériences démontrent hors de tous doutes la nature cinétique de la chaleur. En 1847, l'allemand Helmholtz énonce clairement la première loi de la thermodynamique. Sa formulation est particulièrement intéressante puisqu'elle s'étend à tout l'univers. Cependant, deux théories s'opposent à une interprétation cinétique de la chaleur : le traitement des machines thermiques de Carnot et le monumental *Traité analytique de la chaleur* [13] de Fourier parut en 1822, tous deux fondés sur la notion de calorique.

C'est Clausius qui, en 1850, fini par y voir claire dans son article intitulé *Da la force motrice de la chaleur, et des lois sur la chaleur qui peuvent s'en déduire.* Il s'aperçoit en fait que l'hypothèse du calorique n'est pas essentielle aux conclusions de Carnot. Une machine thermique transforme de la chaleur en force motrice (W), donc Joule a raison. Cependant, seulement une partie de la chaleur cédée par le réservoir chaud (Q_1) sera convertie, le reste (Q_2) sera transféré vers un second réservoir plus froid, donc Carnot a raison. Schématiquement, les trois idées sont:



Quatre ans plus tard, Clausius introduit la notion d'entropie. Il remarque que pour une transformation réversible, le changement d'entropie est nul. Il comprend alors que l'entropie est en fait une fonction d'état macroscopique au même titre que l'énergie, la pression, le volume ... Il est donc en mesure d'énoncer mathématiquement la seconde loi de la thermodynamique pour un système isolé: $\Delta S \geq 0$, l'égalité étant atteinte pour un processus réversible. Le changement d'entropie d'un réservoir à température constante est défini comme le rapport de la chaleur qu'il gagne sur sa température. Cette inégalité, avec la première loi, renferme également la limite d'efficacité d'une machine thermique. En effet, en utilisant la notation de la figure précédente:

$$\Delta S = -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \geqslant 0 \qquad \Rightarrow \qquad W = Q_1 - Q_2 \leqslant \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) Q_1$$

L'efficacité d'une machine augmente lorsque l'écart en température entre les deux réservoirs augmente. Enfin, le rêve de Carnot était réalisé, Clausius avait établi une théorie complète de la chaleur.

La notion d'entropie apparaît mathématiquement afin d'expliquer correctement le fonctionnement d'une machine thermique. Or, on ne sait pas ce qu'elle représente réellement. De plus, elle est définit à une constante additive près puisqu'on ne peut que mesurer des différences d'entropie. Fait encore plus étrange, l'entropie est la seule loi physique qui s'exprime sous forme d'inégalité. L'entropie ne peut qu'augmenter. Pourtant, les lois de la mécanique sont parfaitement réversibles dans le temps.

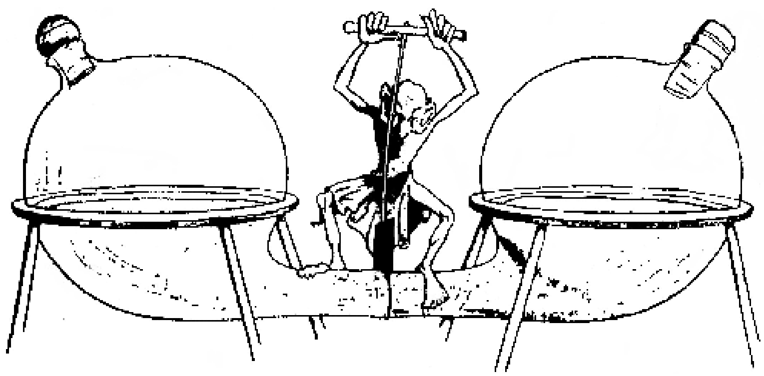
Démon de Maxwell [environ toutes les références!]

Le livre de Maxwell, parut en 1871 sous le nom de *Theory of Heat*, se termine par une section intitulée *Limitation de la seconde loi de la thermodynamique.* C'est dans la citation suivante qu'est né le Démon.

> For we have seen that the molecules in a vessel full of air at uniform temperature are moving with velocities by no means uniform [...]. Now let us suppose that such a vessel is divided into two portions, A and B, by a division in which there is a small hole, and that a **being, who can see the individual molecules**, opens and closes this hole, so as to allow only the swifter molecules to pass from A to B, and only

> the slower ones to pass from B to A. He will thus, without expenditure of work, raise the temperature of B and lower that of A, in contradiction to the second law of thermodynamics. [19]

Maxwell venait de découvrir comment enfreindre la seconde loi de la thermodynamique, il a recours à un être intelligent. C'est William Thompson qui baptisa cette créature Le Démon Intelligent de Maxwell. En fait, Maxwell a été beaucoup trop exigeant envers son Démon en lui demandant de mesurer la vitesse des particules. Il s'est plus tard aperçu que son Démon pouvait simplement laisser passer toutes les particules provenant de A et bloquer celles provenant de B, dans un réservoir à température constante: une simple valve. Ainsi, il augmente la pression du côté B et abaisse celle du côté A, en contradiction avec la formulation Kelvin-Plank de la seconde loi. Plusieurs autres formes de Démons vont voir le jour avec le temps : Le démon mécanique de Szilard, la roue dentelée de Feynman, le Démon du choix de Zurek,... nous y reviendrons plus loin. Darling et Hulburt illustrèrent le Démon comme suit en 1955:



Maxwell est également un des pères fondateurs de la physique statistique. Il est le premier à avoir recours aux probabilités pour décrire la distribution des vitesses des particules d'un gaz, la *distribution de Maxwell.* C'est un pas important vers la compréhension de la nature de cette chose que l'on appelle entropie. Maxwell ne règle pas la question, mais sans son introduction des probabilités en physique, l'entropie serait sans doutes demeurée le rapport de la chaleur gagnée sur la température pendant de longues années.

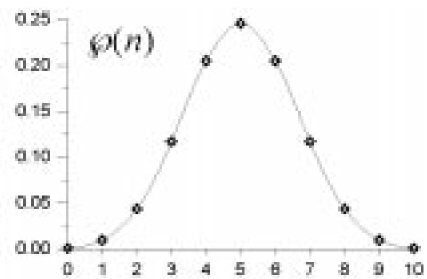
On ne peut évidemment passer sous silence le chef d'œuvre de Maxwell, la théorie de l'électromagnétisme. D'un certain point de vue, Maxwell est un réformiste qui prépare la révolution scientifique du début du XXe siècle. Sa théorie électromagnétique est la pierre d'angle de la relativité restreinte d'Einstein de 1905. De plus, en introduisant formellement les champs locaux afin de remplacer les forces à distance, il établit le mode de penser conceptuel de la relativité générale. Finalement, en introduisant les probabilités en physique, il prépare le terrain pour l'interprétation de la mécanique quantique qui apparaîtra dans les années 1920, malgré que la nature probabiliste de la mécanique quantique est plus profonde que celle de la thermodynamique.

Interprétation probabiliste de la deuxième loi [11, 21, 27]

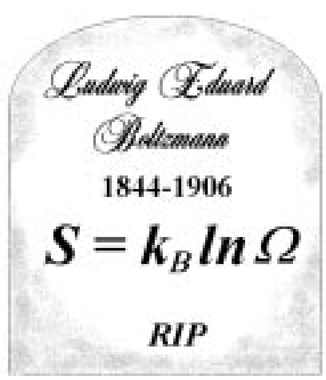
Chaque chose en son temps. Avant de sauver la seconde loi, il serait sage d'essayer de la comprendre. C'est le physicien autrichien Ludwig Eduard Boltzmann qui accomplit le premier pas dans la bonne direction. Selon lui, une interprétation microscopique de l'entropie s'imposait. L'entropie, telle que définie par Clausius, est une quantité macroscopique mesurable avec des instruments de base tels un baromètre, un thermomètre et une balance. De plus, tout comme le volume, la masse et l'énergie, l'entropie est additive. En ce sens, l'entropie ne dépend pas des propriétés ou de l'état des molécules.

Comme tout bon disciple de Maxwell, Boltzmann se tourna vers les probabilités pour étudier la question. Afin de comprendre son raisonnement, prenons quelques instants pour jouer à un jeu de pile ou face. Supposons que l'on lance 10 pièces de 1$, la probabilité de voir apparaître n piles est donnée par

$$\wp(n) = \frac{10!}{(10-n)!n!}\frac{1}{2^n}$$



En moyenne, il faut un peu plus de 500 lancés avant d'obtenir une chaîne de 10 piles. On voit donc que la nature préfère les configurations aléatoires aux configurations ordonnées. Boltzmann plaça cette observation sur le même pied d'égalité que l'augmentation inlassable de l'entropie. Il se buta alors à un problème de taille : comme nous l'avons mentionné, l'entropie est additive alors que les probabilités sont multiplicatives. Comment relier une quantité additive à une quantité multiplicative. Une fois formulée si clairement, la réponse est évidente, l'entropie est proportionnelle au logarithme du nombre d'états accessibles au système; c'est la fameuse formule de Boltzmann.



Démons mécaniques [26, 1, 12]

Comme Maxwell l'a remarqué, le Démon peut se réduire à une simple valve; c'est ce que nous entendons par Démon mécanique. En ce sens, les Démons mécaniques ne doivent faire aucune preuve «d'intelligence» . Plusieurs autres types de Démons mécaniques ont été proposés, le plus populaire étant sans doutes la roue dentelée introduite par le célèbre physicien américain Richard Feynman. Ce Démon est en fait un moulin à vent miniature actionné par le mouvement aléatoire des particules du gaz. Une roue dentelée munie d'un clapet nous assure que le mouvement du mécanisme se fait dans un seul sens. Ce mécanisme actionne une poulie servant à soulever une masse. En quoi ce mécanisme viole-t-il la seconde loi? Il nous permet d'effectuer un travail à la Joule : un processus dont le seul effet est de transformer de la chaleur en travail. Or, comme le savait Carnot, un tel processus est impossible, une partie de la chaleur doit être transférée à un réservoir froid. Tel qu'énoncé ci-dessus, le problème du Démon mécanique constitue ce que l'on peut appeler un *bon problème de physique* : l'énoncé est simple mais la solution n'est pas du tout évidente. C'est Einstein qui apporta un élément de solution à cette énigme au cours de son année de gloire. Einstein étudia le mouvement erratique d'un grain de pollen dans un liquide au repos. En moyenne, la pression sur toute la surface du grain de pollen s'additionne de façon à annuler la force résultante. Toutefois, comme il est possible d'obtenir 7 piles et 3 faces à notre jeu de pile ou face, il est possible que les fluctuations statistiques dans le gaz fassent accélérer le grain de pollen. L'analyse mathématique détaillée d'Einstein fournit des prédictions en parfait accord avec les observations expérimentales : c'est le mouvement Brownien.

Einstein n'était pas le premier à suggérer cette analyse du mouvement Brownien, le brillant physicien polonais Smoluchowski en était venu aux mêmes conclusions quelques années auparavant mais ne disposait pas de données expérimentales pour valider sa théorie. Néanmoins, il remarque en 1912 que ce mouvement Brownien joue un double rôle dans le problème du Démon mécanique. De toutes évidences, il est le responsable de la mise en marche du moulin miniature. D'autre part, il fournit l'explication invalidant son bon fonctionnement. Smoluchowski étudie la «valve mécanique» imaginé par Maxwell. Cette valve étant à l'équilibre thermique avec le reste du gaz, elle souffre des mêmes fluctuations statistiques que le reste des particules. Le mouvement Brownien rend son fonctionnement suffisamment aléatoire pour que la deuxième loi ne soit pas violée en moyenne, parfois le clapet est efficace, parfois il ne l'est pas.

Un raisonnement analogue peut être fait avec le système de roue dentelée et clapet suggéré par Feynman. Or, les esprits tordus diront qu'il suffit de refroidir ce système de sorte qu'il ne soit pas à l'équilibre thermique avec le gaz et qu'il puisse tirer avantage des plus grandes fluctuations thermiques du gaz. Un tel refroidissement peut être accompli en plongeant la roue dentelée et le clapet dans un réservoir de chaleur à plus basse température que le gaz. Oups! Nous voilà revenus 80 ans en arrière à la machine proposée par Carnot avec ses deux réservoirs de chaleur à températures différentes. Il n'est donc pas surprenant que l'on puisse tirer profit de cette situation; d'ailleurs, le mouvement aléatoire de la roue dentelée élève la température du réservoir de chaleur à basse température comme l'a si bien démontré Joule.

Cette explication peut sembler un peu étrange à première vue et plusieurs physiciens ne l'acceptèrent simplement pas. Nous ne pouvons évidemment pas la vérifier expérimentalement puisque nous ne possédons pas une nanotechnologie pouvant construire de tels clapets. Néanmoins, en

1992, un personnage très important de la physique contemporaine d'origine polonaise travaillant au Los Alamos National Laboratory fournit un élément de preuve à l'explication de Smoluchowski. Son nom est Wojciech Hubert Zurek. À défaut de pouvoir vérifier directement par l'expérience cette explication, Zurek simula numériquement le comportement d'un Démon mécanique. Son Démon était celui proposé par Maxwell et le gaz fut remplacé par 500 000 000 000 boules de billard subissant des collisions avec les parois et entre elles. Ses conclusions sont en accord avec l'explication de Smoluchowski, le clapet est agité de mouvement Brownien et la seconde loi tien le coup.

La Mesure [34]

Une simplification majeure du problème du Démon a été suggérée dès 1929 par Leo Szilard dans un article intitulé *On the decrease of entropy in a thermodynamic system by the intervention of a intelligent beings* [26]. Szilard est sans doutes le physicien obtenant la cote (*popularité auprès du grand public*)/(*importance des travaux*) la plus basse de tous les scientifiques du XXe siècle. En effet, aidé d'Einstein, il déposa un brevet sur un nouveau type de réfrigérateur; avec Enrico Fermi, il démontre la possibilité d'une réaction nucléaire en chaîne. Fait encore plus important, il contribua à la rédaction d'une lettre adressée au président Roosevelt datée du 2 août 1939 qui, accompagnée de la signature d'Einstein, a mené à la mise sur pied du projet Manhattan. Il connaît les travaux de Smoluchowski et admet que l'augmentation de l'entropie d'un système ne peut être accomplie que par un être intelligent. Il propose un autre système fort simple que l'on appelle communément la machine de Szilard.

Un cylindre en contact avec un réservoir de chaleur renferme un gaz constitué d'une seule molécule. Un observateur externe (Démon) insère une partition coulissante divisant le cylindre en deux volumes V_d et V_g (*droite et gauche*). Par la suite, il détermine la position relative de la particule par une mesure. Si la particule est à la droite de la partition, il placera un levier à gauche de la partition et inversement si elle est à gauche. La particule effectuera un travail sur la cloison qui sera récupéré par le levier pour soulever une masse.

Par mesure, Szilard entend la création d'une corrélation entre deux variables préalablement indépendantes. Par exemple, la variable x représentant la position de la particule peut prendre la valeur ± 1: $+$ pour droite et $-$ pour gauche. De même, nous pouvons représenter par y la position du levier. Dans ce cas, la corrélation est très simple: $y = -x$ à l'instant de la mesure. Suite à la mesure, la valeur de x peut changer sans affecter la valeur de y. Un des principaux avantages de la machine de Szilard est qu'elle identifie mathématiquement ce qu'est la mesure et à quel moment elle intervient. De plus, Szilard identifie un élément clé de l'analyse du problème: la mémoire.

> A system in which such measurements occur shows a sort of memory faculty, in the sense that one can recognise by the state parameter y what value another state parameter x had at an earlier moment and we shall see that simply because of such a memory the Second Law would be violated, if the mesurement could take place without compensation. [26]

La compensation entropique à laquelle il fait référence est introduite dans son article sous forme d'Ansatz:

$$\overline{S_d} = \overline{S_g} = k_B log2$$

où $\overline{S_d}$ et $\overline{S_g}$ représentent l'entropie produite lors d'une mesure de la particule à droite ou à gauche de la cloison. Cet Ansatz sauve la deuxième loi mais, aux yeux de plusieurs, ne fournit pas une explication satisfaisante. Néanmoins, cet article est d'une importance considérable et ses répercussions se font encore sentir de nos jours; c'est l'apparition du «*bit*» d'information, nous y reviendrons.

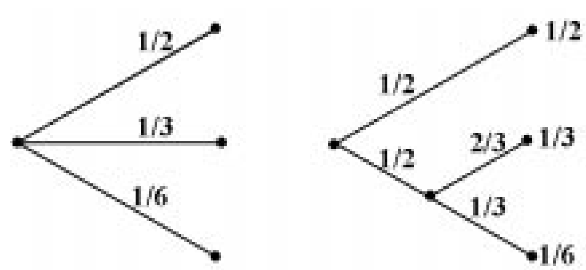
La naissance d'une nouvelle science, l'exorcisme parfait [23, 10, 11, 12]

Avant de poursuivre notre séance d'exorcisme, nous devons nous arrêter quelque peu afin de discuter d'une nouvelle science qui fit son apparition en 1949 dans un livre intitulé *The Mathematical Theory of Communication* [23] par l'ingénieur électrique et mathématicien Claude Elwood Shannon. À l'époque, Shannon travaille au Bell Laboratory sur les systèmes de communication avec bruit. Une de ses nombreuses contributions à la science est l'introduction formelle de la notion d'information. Il remarque que toute source d'information, qu'elle soit un télégramme, une émission télévisuelle ou une personne parlant, possède un taux d'émission d'information mesuré en «bits» par seconde. De même, tout système de communication est caractérisé par un taux maximal de transmission d'information. Le canal de communication pourra donc transporter l'information seulement si son taux maximal est supérieur au taux d'émission d'information. Ces constatations amenèrent Shannon à réfléchir à la question suivante : connaissant la distribution de probabilité associée à un ensemble d'événements, quelle information est gagnée en mesurant le résultat d'un processus aléatoire généré par ces événements? Par exemple, dans notre jeu de pile ou face, nous connaissons la probabilité $\{\wp_n\}$ associée à chaque événement $\{n$ piles $\}$. On lance les pièces et le résultat est caché dans une boîte; quelle quantité d'information $H(\{\wp\})$ vais-je acquérir en ouvrant la boîte? Shannon énuméra les trois conditions auxquelles devait obéir la fonction H :

1. H doit être une fonction continue des variables $\wp_i$.

2. Si tous les $\wp_i$ sont égaux, $\wp_i = 1/N$, alors H est une fonction monotone croissante de N. Pour des événements équiprobables, il y a plus d'incertitude ou plus de choix quand il y a plus d'événements possibles.

3. Si un choix est divisé en deux choix successifs, la valeur initiale de H devrait être la somme pondérée des deux nouveaux H. Schématiquement, cette condition est :



Puisque les probabilités finales sont les mêmes, nous demandons que $H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right) = H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) + H\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Shannon montra que la seule fonction obéissant à ces trois conditions est :

$$H = -K\sum_i \wp_i \ln \wp_i$$

où K est une constante positive. On choisit généralement $K = 1$ et le ln en base 2 de sorte que le résultat soit exprimé en bits.

Shannon nomma cette fonction Entropie. Il semble que ce nom lui ait été proposé par le mathématicien John Von Neumann, ce dernier aurait déclaré qu'un tel nom lui donnerait avantage dans les débats puisque personne ne sait ce qu'est l'entropie. Mais en quoi cette fonction était-elle reliée à l'entropie définit par Clausius? Évidemment, le conseil de Von Neumann ne constitue pas à lui seul la raison pour laquelle Shannon adopta ce nom. En fait, plus de 50 ans auparavant, le physicien Américain Gibbs avait remarqué que l'entropie utilisée par Boltzmann était un cas particulier d'une forme plus générale [14]. Cette forme générale est identique à celle proposée par Shannon, avec $K = k_B$, la constante de Boltzmann. Le cas particulier était l'ensemble microcanonique, l'ensemble où tous les états microscopiques accessibles au système le sont avec probabilités égales. En effet, supposons que $\wp_i = 1/\Omega$, alors

$$\begin{aligned} H &= -k_B\sum_{i=1}^{\Omega}\frac{1}{\Omega}\ln\frac{1}{\Omega} \\ &= -k_B\ln\frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{\Omega}\frac{1}{\Omega} \\ &= k_B\ln\Omega = S. \end{aligned}$$

La généralisation quantique de cette définition a été introduite par Von Neumann [20] et prend la forme :

$$S = Tr\{\rho\ln\rho\} = Tr\left\{\sum_i a_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\ln\left[\sum_j a_j|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right]\right\}$$

nous y reviendrons plus loin. Pour l'instant, retenons que Shannon, indépendamment de toute référence à la thermodynamique, a introduit une fonction mesurant la quantité d'information contenue dans une distribution de probabilité qui est identique à la forme générale de l'entropie utilisée en thermodynamique.

Les questions qui nous viennent immédiatement à l'esprit sont «Qu'est-ce qu'une mesure d'information? » et «Quelles sont ses unités? » Lorsque le logarithme est pris en base n, l'information contenue dans la distribution $\{\wp_i\}$ représente la longueur moyenne minimale d'une chaîne de caractère en base n nécessaire pour représenter un des résultats obtenus de la distribution $\{\wp_i\}$. Par exemple, choisissons la base 2 (on parlera ainsi de *bit* d'information) et supposons qu'il y a quatre événements possibles $\{A, B, C, D\}$ avec les probabilités respectives $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\}$. L'information associée à cette distribution de probabilité est $-\sum_i \wp_i \ln_2 \wp_i = \frac{7}{4}$. La représentation la plus simple que nous pouvons choisir pour désigner les quatre événements est sans doutes $\{\texttt{00}, \texttt{01}, \texttt{10}, \texttt{11}\}$. Or, cette représentation nécessite en moyenne 2 bits d'information par événement. Le tableau suivant illustre un meilleur choix de représentation:

Message	Probabilité	Représentation	Nombre de bits
A	1/2	`0`	1
B	1/4	`10`	2
C	1/8	`110`	3
D	1/8	`111`	3

On obtient bien un nombre moyen de bits de $\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 + \frac{1}{8} \times 3 = \frac{7}{4}$ par événement. Le choix de la représentation n'est pas totalement arbitraire; si nous voulons représenter la chaîne $BCBADA$, nous ne pouvons pas écrire `10 110 10 0 111 0` puisque l'espace blanc constitue un troisième caractère. Nous devons choisir une représentation qui ne pose aucune ambiguité lorsque tous les caractères sont accolés

$$\underbrace{\texttt{1 0}}_{B}\ \underbrace{\texttt{1 1 0}}_{C}\ \underbrace{\texttt{1 0}}_{B}\underbrace{\texttt{0}}_{A}\underbrace{\texttt{1 1 1}}_{D}\underbrace{\texttt{0}}_{A}.$$

Le mariage de deux sciences [15, 34]

À priori, la relation entre théorie de l'information et thermodynamique n'est pas du tout évidente, on croît plutôt à une coïncidence. En 1950, Leon Brillouin [7] semble avoir compris cette relation. Évidemment, à cette époque, on ne s'attaque plus aux Démons mécaniques puisque Smoluchowski a donné une preuve satisfaisante de leur incapacité à enfreindre la seconde loi. Brillouin explique qu'il est impossible d'acquérir de l'information sans coût thermodynamique, c'est l'Ansatz de Szilard. L'intelligence est, selon lui, une capacité de manipuler de l'information. Or, pour manipuler de l'information, le Démon doit effectuer une mesure sur le système et c'est à cet instant, pense Brillouin, que l'entropie augmente de façon suffisante pour sauver la seconde loi.

Plus précisément, Brillouin utilise le premier Démon introduit par Maxwell, celui qui opère un clapet entre deux cloisons de sorte à créer une différence de température de part et d'autre de la partition. Le Démon est donc enfermé dans une boîte fermée à température T_0. En raison de la radiation du corps noir, il ne sera pas capable de voir les molécules, donc incapable de violer la seconde loi. Or, si le Démon est équipé d'une lampe de poche, il pourra distinguer les molécules individuelles sous condition que $k_B T_1 \geq k_B T_0$, où T_1 est la température du filament de sa lampe de poche. En utilisant simplement les équations obtenues par Clausius, Brillouin montre que le bilan entropique est positif. Ainsi, la notion d'information se trouve liée à la thermodynamique via l'acte d'acquisition d'information, la *mesure*.

L'explication précédente est-elle satisfaisante pour justifier l'utilisation du mot entropie pour désigner la mesure d'information introduite par Shannon? Au fond, Brillouin n'a qu'étudié un cas particulier d'acquisition d'information et a démontré qu'il était accompagné d'une augmentation d'entropie. Or, le cas étudié par Brillouin était-il suffisamment général pour conclure que tout processus d'acquisition d'information produit une augmentation d'entropie suffisante pour sauver la seconde loi? Nous reviendrons sur cette question un peu plus loin. Pour l'instant, essayons de mieux comprendre la relation entre information et thermodynamique.

À cette fin, revenons à notre jeu de pile ou face, mais cette fois, utilisons des pièces de monnaie biaisées; chaque pièce i possède une probabilité $\wp_i^p \neq \frac{1}{2}$ de tomber sur pile. Supposons que nous ne connaissons pas ces probabilités mais que nous connaissons des valeurs moyennes $\langle f \rangle = \sum_i \wp_1 \wp_2 ... f(x_1, x_2, ...)$. Si nous connaissons suffisamment de ces valeurs moyennes, nous pourrons, avec un peu d'astuce, en déduire les probabilités. Or, si les valeurs moyennes sont en nombre insuffisant, il y aura plusieurs ensembles de probabilités qui vérifieront les valeurs moyennes. Comment choisir parmi l'ensemble de ces solutions celle qui représente le plus fidèlement nos connaissances. Il suffit d'utiliser toute l'information (valeurs moyennes) mise à notre disposition mais de s'assurer de ne pas introduire d'information supplémentaire. Mathématiquement, ceci se traduit par la maximisation de l'information de la distribution de probabilité sous les contraintes imposées par les valeurs moyennes. [1]

C'est en mai 1957 que cette méthode mathématique fut appliquée à la thermodynamique par un physicien américain E.T. Jaynes. L'idée de Jaynes est de faire de la physique statistique sans faire appel à la physique. Selon lui, même si ses résultats n'étaient pas en accord avec les mesures expérimentales, (ce qui n'est pas le cas) ils sont tout de moins ceux qui représentent la meilleure estimation non biaisée sur la base de l'information disponible.

> The mere fact that the same mathematical expression $-\sum \wp_i log \wp_i$ occurs both in statistical mechanics and information theory does not in itself establish any connection between these fields. This can be done only by finding new viewpoints from which thermodynamic entropy and information-theory entropy appear as the same *concept*. [...] The feature which was missing has been supplied only recently by Shannon in a demonstration that the expression for entropy has a deeper meaning, quite indenpedent of thermodynamics. [15]

En thermodynamique, les valeurs moyennes connues sont les observables macroscopiques, tels l'énergie, la pression, le volume ... Jaynes utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour maximiser l'information sous les contraintes macroscopiques. Dépendamment des contraintes qu'il utilise, il retrouve les résultats biens connus de la physique statistique: s'il ignore le nombre de particules, il trouve les résultats de l'ensemble grand canonique; s'il laisse fluctuer l'énergie, il retrouve le résultat de l'ensemble canonique... La seule intervention de la physique dans ses calculs est au niveau des définitions: quand vient le temps de donner un nom au paramètre de Lagrange qui doit obéir à l'équation

[1] Pourquoi maximiser l'information? L'information utilisée par Shannon représente notre degré d'ignorance, rappelons que cette mesure nous indique la quantité d'information qui sera gagnée lors du dévoilement du résultat de la mesure: plus nous sommes ignorants au départ, plus grand sera notre gain d'information.

$$\lambda = \frac{\partial S}{\partial \langle E \rangle},$$

il choisit $\lambda = 1/T$. Cinq mois plus tard, Jaynes publie un second article où il utilise le formalisme de la matrice densité que nous avons mentionné plus haut. Encore une fois, ses résultats n'apportent aucun résultat original, ils reproduisent les résultats déjà biens établis. La beauté du travail de Jaynes repose sur le point de départ de toute sa démarche: refaire la physique statistique sous un point de vue de la théorie de l'information.

Le travail de Jaynes met en évidence un problème qui est pressenti depuis les travaux de Boltzmann. Si l'entropie est une mesure du manque d'information ou de l'incertitude que nous avons sur le système, alors les prédictions de la thermodynamique sont subjectives. D'un autre côté, pour un système à l'équilibre, l'entropie est une quantité mesurable expérimentalement, donc objective. D'ailleurs, la majeure partie des propriétés de l'entropie a été déterminée expérimentalement. Comment consolider ces deux interprétations *a priori* contradictoires?

Il est incontestable que l'assignation d'une probabilité à chaque configuration basée sur une information partielle est subjective. Même la création d'ensembles statistiques fictifs qui donnent une interprétation des probabilités en fréquences ne peut changer cette affirmation. La raison pour laquelle les mesures expérimentales sont en accord avec la physique statistique basée sur le principe d'entropie maximum est l'étroitesse des distributions de probabilité. L'entropie maximum nous dit de choisir parmi toutes les distributions probabilistes obéissant aux contraintes macroscopiques celle qui est la plus étendue. Malgré cela, les distributions de probabilité sont toujours très étroites. Si nous choisissons une seule configuration microscopique parmi les $10^{10^{10}}$ configurations comprises dans ce pic étroit, les prédictions expérimentales seraient les mêmes. C'est cela qui rend l'entropie objective. Malheureusement, cet état des choses rend impossible la vérification expérimentale de la justesse des distributions de probabilité.

L'accord parfait entre les prédictions statistiques et les mesures expérimentales nous indique l'existence de nouvelles lois de la physique. Si, malgré une distribution de probabilité très étroite, les prédictions ne sont pas en accord avec les mesures expérimentales, c'est que la statistique est basée sur des lois fausses. Ceci est dû à ce que l'on peut appeler la physique statistique subjective qui est l'interprétation microscopique des lois statistiques. Le paradoxe de Gibbs en est un exemple convaincant.

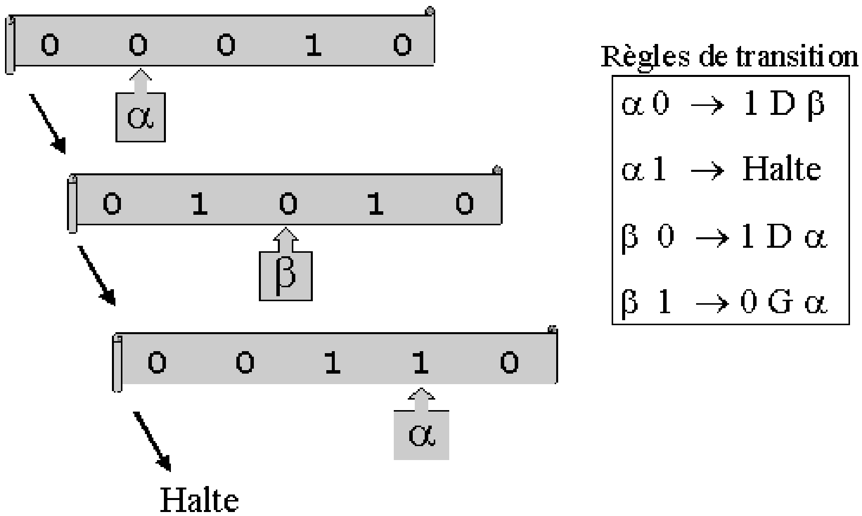
Machine de Turing universelle [10, 18, 25]

Avant de poursuivre, nous devons une fois de plus nous initier à un nouveau concept. La machine de Turing universelle est la machine de calcul universel la plus conceptuellement simple. En 1936, le logicien Allan Turing se questionnait sur la possibilité de reproduire le comportement du cerveau humain à l'aide d'objets inanimés. La machine qu'il conçu est une machine finie opérant sur un ensemble fini de symboles. La machine est constituée d'un ruban séparé en cellules dans lesquels peuvent êtres inscrits les symboles $\{0, 1, B\}$ où B indique une cellule blanche ou vide. Ce ruban constitue ce que nous appelons l'entrée du programme. Le ruban est contrôlé par une tête pouvant occuper un nombre fini d'états $\{q_i\}$ et capable d'effectuer les opérations suivantes:

1. Écrire un élément de l'ensemble $\{0, 1, B\}$ sur la cellule qu'elle est en train de lire.

2. Se déplacer d'une cellule vers la gauche ou vers la droite sur le ruban.

La configuration { état de la tête, état de la cellule sous la tête } définit entièrement l'action de la tête en raison d'un ensemble de règles préétablies définissant la machine. Une des configurations devrait indiquer la fin de l'exécution, sinon le programme ne s'arrêtera jamais. Par exemple, si la tête ne dispose que de deux états, la machine de Turing peut être représentée comme suit:



où les opérations sont définies de la forme (état de la tête, état de la cellule) → (nouvel état de la tête, déplacement Droite ou Gauche, nouvel état de la cellule). À la fin de l'exécution du programme, le contenu du ruban est appelé la sortie du programme.

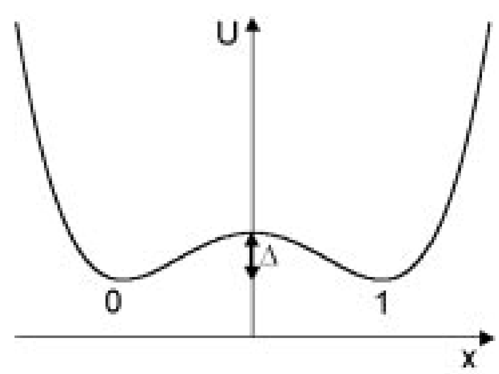
Nous qualifions d'universelle une telle machine puisque lors de sa conception, Turing croyait qu'elle pouvait effectuer les mêmes calculs que toutes autres machines à calculer. Avec le temps, nous nous sommes aperçus que tous les dispositifs que nous concevions étaient effectivement *simulables* sur une machine de Turing. Malheureusement, il est impossible de prouver que toutes les machines le sont. L'idée de l'universalité de la machine de Turing a été reprise formellement dans la thèse de Church. Or, il est possible qu'un jour, une machine oracle puisse calculer des fonctions incalculables sur une machine de Turing.

La thèse de Church est d'une importance capitale pour la science de la logique, les mathématiques et la physique. En logique, elle rend formelle la notion de calculabilité et de complexité de calcul; nous y reviendrons. De plus, elle permet d'apporter une preuve directe du théorème d'incomplétude de Gödel selon lequel il est impossible de prouver qu'un système axiomatique est complet. Cette preuve fait intervenir le problème de l'arrêt: étant donné une entrée quelconque (`0110100...`) sur une machine de Turing, est-ce que l'exécution s'arrête à un instant $T < \infty$? Il est impossible de répondre à cette question puisqu'il faut un temps infini pour obtenir une réponse. En mathématiques, le problème de l'arrêt répond à une des vingt-trois fameuses questions formulées en 1900 par le grand mathématicien David Hilbert: est-il possible de savoir si une équation Diophanticienne possède une solution? Encore une fois, ce problème peut être ramené au problème de l'arrêt. Il est intéressant de noter, sans entrer dans les détails, que la connaissance infiniment précise du nombre Ω de Chaitin [31] nous fournirait une réponse à toutes ces questions. Le nombre Ω est défini comme la probabilité qu'un programme p obtenu par notre jeu de pile ou face s'arrête un jour. En physique, la thèse de Church contribue évidemment à la résolution du problème du Démon de Maxwell, sinon nous n'en aurions pas fait mention!

L'irréversibilité logique [17]

À l'âge de 97 ans, la vie du Démon est sérieusement ébranlée. C'est la découverte de Rolf Landauer sur le coût thermodynamique associé aux opérations logiques irréversibles. Landauer s'intéresse aux limitations des ordinateurs; jusqu'à quel point la technologie nous permettra de réduire leur taille et d'augmenter leur vitesse? Il en vient à la conclusion que toute manipulation d'information irréversible est inévitablement accompagnée d'une génération minimale de chaleur de $k_B T \ln 2$. Il s'attaque également aux arguments qui ont été utilisés pour démontrer que toute manipulation d'information doit être accompagnée d'une génération de chaleur; arguments qui, selon lui, ne sont pas convaincants. Un de ces arguments est qu'un système pouvant servir à manipuler de l'information doit posséder au moins un degré de liberté. Puisque à chaque degré de liberté correspond une énergie de $\frac{1}{2}k_B T$, chaque manipulation d'information doit mettre en jeu une information de l'ordre de $k_B T$ pour surmonter le bruit. Cet argument ne fait cependant pas appel à la dissipation d'énergie, elle n'est en réalité pas nécessaire comme nous le verrons plus loin. Un autre de ces argument est simplement un parallèle avec les travaux de Brillouin: puisque la manipulation d'information est très intimement liée à la mesure, elle doit être accompagnée d'un coût énergétique de l'ordre de $k_B T$ comme Brillouin l'a montré pour la mesure. Or, Landauer est insatisfait des conclusions de Brillouin puisqu'il utilise toujours des modèles particuliers pour démontrer ses affirmations et que ce qu'il définit comme un processus de mesure est très nébuleux.

D'abord, qu'est-ce qu'une opération logique irréversible? C'est simplement une fonction booléenne surjective, *i.e.* à laquelle il n'existe pas un inverse unique. Par exemple, l'opération $\wedge$ (et) ne possède pas un inverse unique: $(\mathtt{1},\mathtt{0}) \xrightarrow{\wedge} \mathtt{0}$ mais $\mathtt{0} \xrightarrow{\wedge^{-1}} (\mathtt{0},\mathtt{0})$ ou $(\mathtt{0},\mathtt{1})$ ou $(\mathtt{1},\mathtt{0})$. Afin de Démontrer ses affirmations, Landauer débute en montrant que tout système physique pouvant être utilisé à des fins de manipulation d'information est plus dissipatif ou équivalent à une particule dans un double puits de potentiel illustré à la figure suivante.



Ainsi, l'étude du coût thermodynamique minimal associé à une manipulation peut se réduire à l'étude d'un cas particulier: initialiser le système binaire à $\mathtt{1}$ sur le un double puits de potentiel.

Si la particule se trouve initialement dans l'état `1`, cette opération se réduit à l'identité qui est, de toutes évidences, réversible et sans coût thermodynamique. Si la particule se trouve initialement dans l'état `0`, on lui applique d'abord une force $F(t)$ dans la direction des x positifs jusqu'à ce qu'elle se trouve au maximum de la courbe de potentiel. Cette opération nous coûte Δ en travail. Ensuite, la force $F(t)$ est orientée vers les x négatifs afin de freiner la particule jusqu'au minimum de la courbe de potentiel. Cette opération est accompagnée d'un travail négatif $-\Delta$, donc le travail total est nul, il n'y a aucun coût thermodynamique associé à cette opération.

Existe-t-il une force $F^*(t)$ qui transportera la particule à l'état `1`, peu importe sa position initiale? Puisque le système est conservatif, le temps peut être inversé et les lois du mouvement seront les mêmes. Dans ce système à temps renversé, la condition initiale est entièrement déterminée, la particule se trouve dans l'état 1. Néanmoins, il existe deux états finaux possibles, l'état `1` ou l'état `0` associées à l'application $F^*(-t)$. Cette situation est impossible puisque les lois du mouvement sont entièrement déterministes. On doit donc en conclure que $F^*(t)$ n'existe pas.

D'un point de vue thermodynamique, l'ensemble des états accessibles à la particule est initialement $\Omega_i = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ et est réduit à $\Omega_f = \{\mathtt{1}\}$. Le nombre d'états ayant été réduit de moitié, il est tout à fait naturel que l'entropie soit réduite d'un facteur $k_B \ln 2$. L'entropie d'un système fermé, par exemple d'un ordinateur alimenté d'une pile, ne pouvant diminuer, cette opération doit être accompagnée par une augmentation de l'entropie ailleurs dans le système libérant $k_B T \ln 2$ de chaleur par bit initialisé.

Il reste maintenant à savoir si les opérations logiques sont nécessairement irréversibles. Celles employées par les calculateurs conventionnels le sont, exception faite de la négation qui est réversible. De toutes évidences, il est inutile de tenter de rendre les opérations réversibles dans les ordinateurs que nous utilisons quotidiennement puisqu'elles dissipent énormément plus que $k_B T \ln 2$ par opération logique, réversible ou non. Néanmoins, considérons un ordinateur idéal suffisamment simple pour les besoins de notre cause. Par exemple, nous pourrions utiliser une machine semblable à la machine de Turing mais qui dispose de deux rubans plutôt que d'un seul. Le premier ruban servirait à effectuer les opérations habituelles de la machine de Turing. L'autre serait une sorte d'archives historiques des opérations sur lequel serait inscrit chacune des configurations occupées par la machine. Il est à noter que la thèse de Church, incontestable jusqu'à ce jour, nous assure que toutes ces opérations peuvent êtres effectuées par une machine de Turing simple.

De cette façon, chaque opération est logiquement réversible puisque l'historique de l'exécution est conservé sur un deuxième ruban. Afin que la machine à calcul soit réutilisable, ce second ruban doit être réinitialisé avant le début de la prochaine exécution, sans quoi le simple fait d'y inscrire une donnée serait irréversible. Landauer en conclut:

> We believe that devices exhebiting logical irreversibility are essential to computing. Logical irreversibility, we believe, in turn implies physical irreversibility, ant the latter is accompanied by dissipative effects. [...] Our unwiedly machine has therefore avoided the irreversible operations during the running of the program, only at the expense of added comparable irreversibility during the loading of the program. [17]

Les calculs réversibles [2, 16]

L'œuvre de Landauer inspira fortement le chimiste américain Charles Bennett qui, en 1973, publie un article démontrant la possibilité d'effectuer un calcul réversible. Il utilise, comme Landauer, une machine disposant d'un second ruban lui permettant d'archiver l'historique du calcul. Puisqu'un simple archivage ne fait que déplacer le problème de l'irréversibilité, Bennett exige de sa machine que, une fois l'exécution S terminée, elle ait effacé toute information intermédiaire de façon à ce que le ruban ne contienne que l'entrée du programme et la sortie désirée. La clé de tout l'article de Bennett repose sur la remarque suivante:

> Now, a tape full of random data cannot be erased except by an irreversible process: however, the history tape is not random - there exists a subtle mutual redundancy between it and the machine that produced it, which may be exploited to erase it reversibly. [2]

Une façon triviale de se débarrasser de l'historique de l'exécution est d'exécuter le programme S à l'envers (S^{-1}). Puisque chaque étape du calcul est réversible, l'exécution peut se faire dans les deux sens:

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{Ruban vide} \\ + \\ \textit{Entrée} \end{array}\right\} \underset{S^{-1}}{\overset{S}{\rightleftharpoons}} \left\{\begin{array}{c} \textit{Historique} \\ + \\ \textit{Sortie} \end{array}\right\}$$

Malheureusement, faire tourner le programme à l'envers ne nous donne pas le résultat du calcul effectué. Cependant, il est possible de connaître ce résultat si, avant de faire tourner le programme à l'envers, on se fait une copie de la sortie sur un troisième ruban. Pendant l'étape du copiage, qui est réversible, nous arrêtons de noter l'historique. Ainsi, lors de l'exécution inverse du programme, la copie ne sera pas effacée puisqu'il n'existe pas d'historique de cette étape. La sortie finale de l'exécution sera donc une copie du résultat final, l'entrée originale et un ruban blanc, tel que désiré.

Évidemment, l'historique du calcul requière un immense espace mémoire, rendant quasi impraticable les calculs réversibles. De plus, le temps de calcul est environ le double que celui requis pour le même calcul fait de façon irréversible puisque le programme est exécuté deux fois (dont une à l'envers). Toutefois, Bennett montra qu'il est possible de réduire considérablement l'espace mémoire utilisé pour l'archivage en découpant l'exécution en plusieurs segments. On exécute une partie du programme de façon réversible, on copie le résultat intermédiaire, on efface l'historique puis on reprend le calcul là où on l'avait laissé.

Il subsiste un dernier souci dans l'esprit de Bennett malgré l'immense progrès qu'il vient d'accomplir: la sortie du programme contient l'entrée, qui est inutile. Cette entrée devrait en principe être effacée par la suite, ce qui ne peut être fait réversiblement. Or, puisque S est maintenant réversible, il existe certainement un S' qui donne comme sortie l'entrée de S lorsqu'on lui fournit comme entrée la sortie de S, et tout ça de façon réversible. À l'aide de ce programme, Bennett réalise son objectif, sa technique est résumée au tableau suivant.

Étape	Action	Ruban 1	Ruban 2	Ruban 3
		Entrée	-	-
1	Exécution directe de S			
		Sortie	Historique	-
2	Copier la sortie			
		Sortie	Historique	Sortie
3	Exécution inverse de S			
		Entrée	-	Sortie
4	Interchanger l'entrée et la sortie			
		Sortie	-	Entrée
5	Exécution directe de S'			
		Entrée	Historique'	Entrée
6	Effacer réversiblement l'entrée supplémentaire			
		Entrée	Historique'	-
7	Exécution inverse de S'			
		Sortie	-	-

L'étape 6 est réversible puisque nous disposons d'une copie des données à effacer. Par exemple, si l'information était emmagasinée dans le double puits de potentiel, nous saurions quelle force appliquer pour réinitialiser le ruban à 1. Bennett a donc montré qu'en disposant des ressources nécessaires, il est possible de combiner des programmes de sorte que le résultat final soit seulement la sortie désirée et que le tout se soit effectué de façon réversible. Combiné à la thèse de Church, nous pouvons en conclure que toute machine peut effectuer sa tâche de façon réversible. Bennett en tire la conclusion:

> It thus appears that every job of computation can be done in a logically reversible manner, without inordinate increase in machine complexity, number of steps unwanted output, or temporary storage capacity. [2]

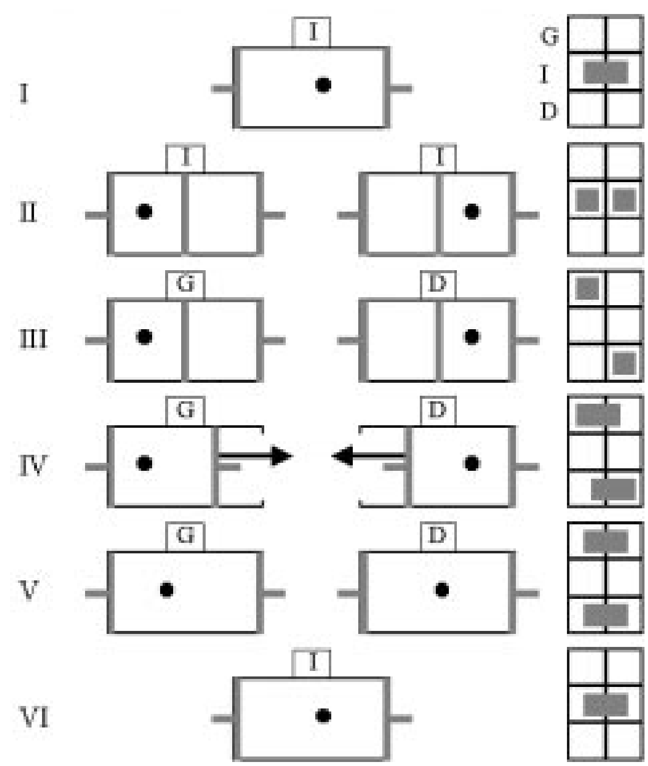
On mélange bien le tout et on laisse reposer [4, 16]

En quoi les machines de Turing et les calculs réversibles peuvent bien nous être utiles pour exorciser le Démon de Maxwell? La réponse à cette question, bien que particulièrement simple, n'est pas évidente *à priori*. D'ailleurs, il faut attendre jusqu'en 1982 pour que Bennett fasse la connexion entre les travaux de Landauer et ses travaux précédents et le Démon de Maxwell. C'est dans un article intitulé *The thermodynamics of computation - a review*, qu'il établi cette connexion.

Dès 1961, Landauer avait étudié un système magnétique dans lequel une mesure et une duplication d'information pouvait être effectuée sans aucun coût thermodynamique. Ainsi, les arguments de Brillouin sont à écarter. Sans entrer dans les détails, mentionnons que la principale erreur de Brillouin était de considérer que l'utilisation de photons pour effectuer la mesure était indispensable. Un exemple plus familier de mesure réversible est la duplication de l'ARN chez les êtres vivants. La solution du problème ne réside donc pas dans l'étape de la mesure.

Afin de pouvoir tirer avantage de sa mesure, le Démon de Maxwell doit évidemment agir en conséquence du résultat obtenu, par exemple en positionnant correctement le levier dans l'exemple de Szilard. En quelques sortes, le Démon doit *garder en mémoire* le résultat de la mesure. Or, pour qu'il puisse effectuer une seconde mesure, il doit réinitialiser sa mémoire, sinon la nouvelle mesure écraserait l'ancien résultat de façon irréversible. Ainsi, la partie irréversible du procédé par lequel le démon semble violer la deuxième loi n'est pas l'acte de mesure, mais *la restauration dans un état normal de la mémoire du Démon*.

Afin de mieux comprendre cette subtilité, étudions plus en détails chaque étape du cycle de la machine de Szilard. Nous représentons sur la figure suivante la disposition physique de l'appareil et l'état du Démon effectuant la mesure; ces états sont notés I, D et G représentant respectivement l'état initial neutre, la droite et la gauche. À l'étape I, l'état du Démon est l'état initial puisqu'il est prêt à effectuer la mesure. À la seconde étape, on insère une partition, l'état du Démon est inchangé. À la troisième étape, le Démon effectue la mesure réversiblement, son état s'ajuste en conséquence du résultat obtenu. Par la suite, il utilise l'information obtenue pour tirer profit des fluctuations thermiques de la particule. À l'étape V, le système est retourné à sa configuration initiale mais le Démon demeure dans l'état obtenu à l'étape III. Pour retourner à son état initial, il doit effacer l'information contenue dans sa mémoire, c'est donc entre l'étape V et l'étape VI (= I) que se produit l'acte irréversible sauvant la seconde loi. La partie de droite de cette figure représente l'état du système total; une coordonnée verticale pour l'état de la mémoire du Démon et une coordonnée horizontale représentant la position de la particule.



Bennett tire également des dernières observations qu'un ruban contenant une série de N zéros (ruban initialisé) pourrait servir de carburant pour alimenter un engin quelconque. En rendant le contenu de ce ruban aléatoire, une quantité de chaleur égale à $Nk_BT\ln 2$ serait libérée et pourrait être utilisée pour alimenter une machine. Cependant, plutôt que de disposer d'un ruban contenant uniquement des zéros, si je dispose d'un ruban contenant les N premiers bits de l'expansion binaire de π, pourrais-je utiliser ce ruban pour alimenter une machine thermique? En d'autres termes, est-ce que l'expansion binaire de π peut physiquement être distinguée d'une chaîne aléatoire? De même, si je dispose de sept chaînes aléatoires identiques, pourrais-je en tirer profit? La prochaine section répond à ces interrogations.

La complexité algorithmique [10, 18, 28, 29, 28, 33, 31]

Le problème rencontré à la fin de la section précédente provient de la définition probabiliste de la notion d'information. Bien que nous l'ayons jamais démontré, nous avons souvent pris pour acquis que le ruban initialisé à zéro ne contient aucune information; est-ce tout à fait juste? Il doit bien avoir un minimum d'information cachée dans ce ruban, par exemple le ruban contient uniquement des zéros plutôt qu'uniquement des uns. Cela doit bien représenter un bit d'information. Notre définition d'information se prête mal à ce type de système, encore moins au ruban contenant l'expansion binaire de π. L'information est conçue pour s'appliquer à un ensemble d'événements obéissants à une distribution de probabilité et non à un seul événement. Ainsi, elle ne peut associer une valeur en carburant différente à deux rubans aléatoires différents puisqu'ils peuvent tous deux êtres obtenus par un jeu de pile ou face. Physiquement, cela se traduit par l'impossibilité de donner une valeur d'entropie à un système dont on connaît exactement l'état microscopique.

À la fin de son article de 1982, Bennett mentionne qu'il existe une mesure qui s'apparente à l'entropie ou l'information, mais qui est adaptée à la description d'objets uniques. C'est la complexité algorithmique, également connue sous les noms de complexité computationnelle, complexité de Kolmogorov, complexité de Kolmogorov-Chaitin, complexité descriptive, ... Cette théorie a été développée en grande partie par le mathématicien russe Kolmogorov et les américains Chaitin et Solomonoff dans les années 1960. Leur but était de trouver une mesure du degré d'aléatoire (*randomness*) d'une chaîne binaire. Cette science s'est avérée énormément fructueuse, d'abord en mathématiques et plus tard, avec la venue de Bennett et Zurek, en physique. Encore tout récemment, on applique cette science à des études économiques ou boursières, à des modèles d'évolution, à la biologie, ... Certains vont même jusqu'à l'utiliser pour expliquer l'origine de la vie (système très complexe).

La complexité possède plusieurs définitions qui sont toutes plus ou moins équivalentes et qui, en général, sont en accord avec notre notion intuitive de ce qui est complexe.[2] Par exemple, il est intuitivement évident qu'une chaîne composée de 10^6 `0` est moins complexe qu'une chaîne de 10^6 `0` ou `1` obtenue par pile ou face. Une définition formelle pouvant tenir compte d'un tel état des choses fait appel à la notion de machine de Turing universelle rencontrée plus haut. Soit une chaîne binaire de longueur N notée $x = \{\texttt{0100101010...}\}$. Il existe un programme p pouvant

[2] Il est difficile de définir la complexité qui devrait être utilisée en physique. Par exemple, une seule bactérie peut générer toute une colonie, donc la complexité d'une bactérie seule ne devrait pas être très inférieure à celle de la colonie. Dans ce cas, une bactérie morte serait beaucoup moins complexe qu'une bactérie vivante bien que leur structure physique sont fort semblebles... Une discussion intéressante se trouve dans [5]

être exécuté sur une machine de Turing universelle dont la sortie est x. Par exemple, le simple programme suivant écrit en FORTRAN remplit très bien cette tâche:

```
BEGIN PROGRAM A
   WRITE 0100101010...
END PROGRAM A
```

Puisque ce programme existe en FORTRAN, il en existe un pouvant être exécuté sur une machine de Turing T en raison de la thèse de Church. Évidemment, il est fort probable qu'il existe plus d'un programme dont la sortie est x. La complexité algorithmique est définie comme étant la longueur binaire du programme le plus court noté p^* ayant comme sortie x et s'exécutant en un temps fini. Si nous notons $|y|$ la longueur d'une chaîne binaire y quelconque, alors la définition de la complexité $H(x)$ d'une chaîne x est

$$H(x) \equiv \min_p \{|p| : T(p) = x\} = |p^*|$$

où $T(p)$ dénote le résultat de l'exécution de p sur la machine de Turing T. La thèse de Church nous dit que toutes les machines de Turing sont équivalentes en ce sens qu'elles peuvent toutes effectuer le même travail. À première vue, il peut sembler que la définition de la complexité dépend de la machine que nous employons; certaines machines, en raison de leur architecture, nécessitent un programme moins long pour effectuer le même travail. C'est vrai. Néanmoins, si une machine de Turing T_1 donne x comme sortie lorsqu'on lui donne comme entrée le programme p, alors une seconde machine T_2 fournira la même sortie si on lui fournit l'entrée $s_{12}+p$ où s_{12} est un préfixe au programme p qui indique à la machine T_2 comment simuler la machine T_1. Ainsi, la complexité est définie à une constante additive près.

Malheureusement, Chaitin a montré en 1975 que la fonction H n'est pas une fonction calculable de la variable x, c'est une manifestation du théorème d'incomplétude de Gödel. En effet, si nous disposons d'un programme p qui, lorsque exécuté sur une machine de Turing T, donne comme sortie x, il est impossible de prouver qu'il n'existe pas un programme p' plus court que p qui, lorsque exécuté sur la même machine T, donne x. Par exemple, les deux programmes suivants ont pour sortie la chaîne de caractère formée de 10^{100} `0`:

```
BEGIN PROGRAM B
   WRITE 0000000000...
END PROGRAM B
```

```
BEGIN PROGRAM C
   DO I=1,10^100
      WRITE 0
   END DO
END PROGRAM C
```

Or, le programme `B` a une longueur d'environ 10^{100} bits alors que la longueur du programme `C` est d'environ $\ln 10^{100} \approx 332$ bits (c'est le nombre de caractères requis pour écrire le nombre 10^{100} en binaire). Néanmoins, la fonction H se prête bien aux manipulations mathématiques et elle peut être extrêmement utile. En général, la constante additive est négligeable devant la complexité intrinsèque de l'objet étudié; par exemple, un gaz étudié dans un contexte classique de thermodynamique possède une complexité d'environ 10^{23} alors que la constante peut être de quelques milliers de bits. De plus, elle correspond bien à notre intuition de la notion de complexité.

Avec cette définition, Kolmogorov et Chaitin réussirent à définir formellement ce qu'est un objet aléatoire: Une chaîne de caractère est dite aléatoire si sa complexité est égale à sa longueur, c'est-à-dire si $|x| \approx H(x) = |p^*|$. La chaîne de caractères composée de 10^6 `0` n'est donc pas aléatoire puisque la longueur du programme `C` est bien inférieure à 10^6. Une conséquence directe de cette définition est qu'il est impossible de démontrer qu'une chaîne est aléatoire sauf pour quelques exceptions. Par exemple, le programme p^* est aléatoire, la preuve est triviale mais amusante! Avec cette définition, on réussit clairement à distinguer l'expansion binaire de π d'un nombre aléatoire puisque la complexité de π est très petite. En effet, il existe des algorithmes très simples pour calculer π.

Le caractère de la complexité qui nous intéresse ici est sa ressemblance avec l'entropie. En effet, soit la distribution de probabilité $\wp_i$, il est possible de lui associer une information $S[\wp] = -\sum_i \wp_i \ln \wp_i$. Chaitin a montré l'inégalité suivante concernant l'entropie statistique (information) et la complexité algorithmique pour un système macroscopique:

$$S[\wp] \lesssim \sum_i \wp_i H_i \lesssim S[\wp] + H(\wp)$$

où H_i dénote la complexité de l'état i et $H(\wp)$ est *grosso modo* le nombre de bits requis pour exprimer la distribution de probabilité $\{\wp_i\}$ avec un certain niveau de précision. Pour des gros systèmes, on obtient donc une égalité entre ces deux quantités: l'entropie est la valeur moyenne de la complexité de chaque état.

Dans les années 1980 Zurek a inventé un nouveau type de Démon qui, grâce à une utilisation particulièrement rusée de son intelligence, réussit à enfreindre la seconde loi, c'est-à-dire que l'explication de Bennett ne réussit pas à excuser son comportement. Ce Démon doit travailler dans un système avec un haut niveau de corrélations statistiques entre les particules, par exemple un système quantique de particules en interaction. Plutôt que de réinitialiser sa mémoire avant chaque mesure, ce Démon accumule un grand nombre de mesures dans une mémoire tampon, disons N mesures. À ce stade, il pourrait réinitialiser sa mémoire tampon, ce qui lui coûterait $Nk_B \ln 2$ d'entropie, et la deuxième loi serait sauvée. Puisque le système quantique présente de fortes corrélations, le contenu de sa mémoire n'est pas complètement aléatoire. Si le Démon est un bon physicien, il pourra trouver un algorithme de longueur inférieure à N bits pouvant donner comme sortie le contenu de sa mémoire. Il peut donc remplacer le contenu de sa mémoire par ce programme de façon réversible puisque toute l'information contenue dans les mesures est présente dans le programme; il n'y a aucune perte d'information. En un certain sens, le Démon compresse l'information de la même façon que le programme WinZip sur votre PC peut le faire, puisqu'il est possible de «dézipper» un fichier, le processus est réversible.

Dans un article daté de 1989, Zurek propose une nouvelle définition de l'entropie physique pour régler ce problème. Sa définition n'est pas contradictoire à la définition opérationnelle faite par Clausius environ 140 ans avant. Dans les systèmes macroscopiques, les deux définitions sont équivalentes. Nous citons ici un passage de l'article de Zurek:

> [...] In large systems, probabilistic ensemble definitions of entropy (e.g. coarse-grained entropy of Gibbs and Boltzmann's entropy $H = \ln W$, as well as Shannon's information-theoretic entropy) provide accurate estimates of the algorithmic entropy of an individual system or its average value for an ensemble. One is thus able to red-erive much of thermodynamics and statistical mechanics in a setting very different fron the usual. *Physical entropy*, I suggest, is a sum of (i) the missing informationmesured by Shannon's formula and (ii) of the algorithmic information content -algorithmic randomness- present in the available data about the system.This definition of entropy is essential in describing the operation of thermodynamic engines from the viewpoint of information gathering and using systems. These Maxwell demon-type entities are capable of acquiring and processing information and therefore can "decide" on the basis of the result of their measurements and computation the best strategy for extracting energy from their surrondings. From their internal point of view the outcome of each mesurement is definite. The limits on thermodynamic efficiency arise not from the ensemble considerations, but rather reflect basic laws of computation [...] [28]

Cette nouvelle définition rend la deuxième loi infaillible, du moins jusqu'à preuve du contraire! De plus, elle permet de mieux comprendre une question aussi vieille que la science: pourquoi le temps s'écoule toujours dans le même sens?

L'asymétrie du temps [32]

La question formulée à la fin de la section précédente peut sembler étrange et hors de contexte mais il faut garder à l'esprit que la seconde loi de la thermodynamique est la seule loi fondamentale de la physique qui brise la symétrie du temps: l'entropie ne peut qu'augmenter avec le temps. Il est impossible de donner une explication dynamique de cette loi. Pour s'en convaincre, considérons un système quantique dont l'état initial est représenté par une matrice de densité ρ. L'équation de Schrodïnger nous indique qu'il existe une matrice $U(t)$ unitaire qui nous permet de connaître l'état du système à tout instant t: $\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t)$. Ainsi, l'entropie généralisée aux systèmes quantiques par Von Neumann ne peut pas évoluer dans le temps puisque l'évolution (qui peut être vue comme un changement de base) n'affecte pas la trace: c'est le théorème du mathématicien français Joseph Liouville datant du milieu du XIXe siècle.

Boltzmann et Gibbs avaient chacun leur petite idée pour régler ce problème: le théorème H pour le premier et l'entropie *coarse-grained* pour le second. Or, ces deux explications font intervenir la même idée de base: la connaissance *partielle* du système. La définition de Zurek ne règle pas complètement le problème, mais apporte des éléments de réponse nouveaux. Par exemple, si on voit dans un film une vitre éclater en petits morceaux, il nous sera facile de conclure que le film se déroule dans le bon sens, le temps s'écoule bien vers le futur. Cependant, l'entropie, au sens de Boltzmann, est pratiquement inchangée. Le nombre d'états accessibles est environ le même. Or, la nouvelle configuration est extrêmement plus complexe que la configuration initiale. Ainsi, l'entropie totale, *i.e.* celle définie par Zurek, augmente, ce qui exprime l'irréversibilité du processus.

Le problème de l'asymétrie du temps est loin d'être réglé. Pour schématiser notre compréhension actuelle, imaginons que l'on dispose de deux urnes et de 1000 boules numérotées de 1 à 1000. On place initialement toutes les boules dans l'urne de droite. Un panier contient des bouts de papiers sur lesquels sont inscrits les numéros de 1 à 1000. On pige sans tricher un papier du panier et on change d'urne la boule qui correspond au numéro pigé. On replace le papier dans le panier et on recommence. À la première étape, il est certain que la boule passera de l'urne de droite à l'urne de gauche. Au deuxième essai, la probabilité sera de 999/1000, puis 998/1000 + 1/1000, puis $997/1000 + 998/1000 \times 999/1000 \times 2/1000 + 999/1000 \times 1/1000$, et ainsi de suite. Avec le temps, 500 boules se retrouverons à gauche et 500 à droite avec des petites fluctuations statistiques. La probabilité qu'une fluctuation statistique fasse retourner toutes les boules à l'urne de droite est extraordinairement petite.

L'irréversibilité en tant que conséquence de la seconde loi de la thermodynamique est de la même nature que l'irréversibilité illustrée dans l'exemple précédent. Elle est, semble-t-il, une conséquence de la loi des grands nombres. *L'entropie ne peut probablement qu'augmenter* serait une formulation plus exacte de la seconde loi. Par exemple, le Démon peut bien ouvrir et fermer sa porte au hasard sans se préoccuper de ce qui se passe à l'intérieur de la boîte. Il y a une probabilité non nulle qu'en procédant ainsi il puisse tirer profit des fluctuations thermiques et enfreindre la seconde loi. Or il est certain que s'il effectue cette opération un nombre infini de fois, il ne peut que perdre. C'est ça la deuxième loi!

Et le reste ... [9]

Le lecteur initié a sans doute remarqué que nous avons à maintes reprises mentionné l'importance de la mesure et que nous utilisons des termes issus de la mécanique quantique tels rayonnement du corps noir et matrice densité, sans ne jamais mentionner le problème de la mesure quantique. En soi, ce problème est trop complexe pour être décrit en une simple section, mais est trop important pour passer sous silence. L'étude du problème du Démon de Maxwell et l'avènement de la science de l'information ont fourni des nouvelles interprétations du postulat de la mesure. L'article de Nicolas J. Cerf datant de 1997 en est un bon exemple.

La théorie de l'information appliquée à la physique a également trouvé sa place dans plusieurs domaines: la cosmologie, les systèmes chaotiques, l'évolution, sans oublier l'informatique quantique [6]. Bref, le Démon de Maxwell s'est avéré être un outil formidable de recherche qui a fait couler beaucoup d'encre et qui est toujours présent au cœur des débats de la physique moderne.

En guise de conclusion, il est légitime de se demander si le Démon est véritablement mort? D'ailleurs, on l'a cru mort pendant environ dix ans jusqu'à ce qu'il rejaillisse sous une forme plus rusée en 1989. Lorsque cette question a été adressée à Zurek, il a répondu:

> Not at all, he has just been underemployed all these years. Instead of sitting in a gas at equilibrium, foolishly trying to beat the second law-which he cannot do-he should be in some system that is far from equilibrium. And there he should use his massive intelligence to figure out ways of extracting energy in the most efficient way possible. He should apply the second law to some useful purpose, not try to subvert it! [1]

Références

[1] Hans Christian Von Bayer, *Maxwell's Demon*, Random House, 1998.

[2] Charles H. Bennett, *Logical reversible computation*, dans [MDEIC], 1973.

[3] Charles H. Bennett, *Note on the history of reversible computation*, IBM J. Res. Develop. vol. 32, no. 1, 1988.

[4] Charles H. Bennett, *The thermodynamics of computation-a review*, Int. J. of Theorical Phys. vol. 21, no. 12, 1982.

[5] Charles H. Bennett, *How to define complexity in physics and why*, dans [CEPI], 1990.

[6] G. Brassard, *A quantum jump in computer science*, Computer Sciences Today, Springer-Verlag, 1995.

[7] L. Brillouin, *Maxwell's demon cannot operate: information and entropy, I*, dans [MDEIC], 1950.

[8] S. Carnot, *Réflexions sur la puissance motrice du feu*, Paris, Librairie Philosophique J. Vrin, 1978.

[9] Nicolas J. Cerf et Chris Adami, *Quantum information theory of entaglement and measurement*, quant-ph/9605039 1997.

[10] Thomas M. Cover et Joy A. Thomas, *Elements of Information theory*, Wiley, 1991.

[11] K.G. Denbigh ET J.S. Denbigh, *Entropy in relation to incomplete knoledge*, Campbridge University Press, 1985.

[12] Richard P. Feynman, *Feynman lectures on computation*, Addison-Wesley, 1996.

[13] J. Fourier, *The analytical theory of heat*, Dover, 1955.

[14] J.W. Gibbs, *Elementary principles in statistical mechanics*, Yale university press, Londre, 1928.

[15] E.T. Jaynes, *Information theory and statistical mechanics I et II*, Phys. Rev. vol 106, no. 4, et vol. 108, no 2, 1957.

[16] Rolf Landauer, *Information is physical*, Physics Today, mai 1991, pp. 23.

[17] R. Landauer, *Irreversibility and heat generation in the computing process*,dans [MDEIC], 1961.

[18] Ming Li ET Paul Vitànyi, *An introduction to Kolmogorov complexity and its applications*, Springer-Verlag, 1997.

[19] J.C. Maxwell, *The Theory of heat*, 2e édition, Londre, 1872.

[20] J. Von Neumann, *Mathematical foundation of quantum mechanics*, Princeton university press, Princeton, 1955.

[21] Reif, *Fundamentals of statistical and thermal physics*, McGraw-Hill, 1965.

[22] Rumford, *Inquiry concerning the source of heat excited by friction*, Philosophical transaction, Londre, vol. 88, 1798.

[23] Claude E. Shannon, *The Mathematical Theory of Communication*, The University of Illinois press, 1949.

[24] D. Sénéchal, *Histoire des sciences*, Notes de cours (PHQ-399), Département de Physique, Université de Sherbrooke, 1999.

[25] K. Svozil, *The Church-Turing thesis as a guiding principle for physics*, quant-ph/9710052, 1997.

[26] L. Szilard, *On the decrease of entropy in a thermodynamic system by the intervention of a intelligent beings*, dans [MDEIC], 1929.

[27] A.-M. Tremblay, *Physique statistique*, Notes de cours (PHQ 340), Département de Physique, Université de Sherbrooke.

[28] Wojciech H. Zurek, *Algorithmic randomness and physical entropy*. Phys. Rev. A vol. 40, no. 8.

[29] Wojciech H. Zurek, *Algorithmic randomness, physical entropy mesurements, and the Demon of choice*, quant-ph/9807007, 1998.

[30] Wojciech H. Zurek, *Thermodynamic cost of computation, algorithmic complexity and the information metric*, Nature, vol. 341, pp. 119, 1989.

Et les recueils :

[31] G.J. Chaitin, *Information Randomness & Incompleteness, papers on algorithmic information theory*, World Scientific, 1987.

[32] [CEPI] J.J. Halliwell, J.Pérez-Mercader, W.H. Zurek, *Physical origin of time asymetry*, Cambridge University press, 1994.

[33] W.H. Zurek, *Complexity, entropy and the physics of information*, Addison Wesley, 1991.

[34] [MDEIC] H.S. Leff, A.F. Rex, *Maxwell Demon, Entropy, Information, Computing*, Princeton University Press, 1990.