4. PHÉNOMÉNOLOGIE DES TRANSITIONS DE PHASE, SYMÉTRIE BRISÉE

4.1 Phases, états de la matière, symétrie brisée

4.2 Thermodynamique, transitions de phase (premier ordre)

4.3 Théorie de champ moyen

4.3.1 Approche de Weiss

4.3.2 Approche variationnelle

4.3.3 Dépendance spatiale, longueur de corrélation

4.4 Symétrie et ordre de la transition dans la théorie de Landau[1]

Pour qu'une transition de phase soit continue, les deux phases doivent être présentes au point de transition. Ceci veut dire qu'une condition nécessaire pour que la transition de phase soit continue est que le groupe de symétrie de chacune des deux phases doit être un sous-groupe du groupe de symétrie de la phase au point de transition.

Autrement dit, on peut supposer qu'un certain groupe de symétrie $\mathbf{G}_0$ décrit la phase qui existe en un point du diagramme de phase et on se demande quelles phases peuvent émerger de chaque côté de ce point. Prenons par exemple la densité d'un cristal $\rho(\mathbf{r})$ comme paramètre d'ordre. Au point de transition, on peut développer $\rho(\mathbf{r})$ sur une base de fonctions $\phi_i^{(n)}(\mathbf{r})$ qui se transforment selon

[1] E.M. Lifshitz and L.P. Pitaevskii, "Statistical Physics, 3rd edition, Part 1", (Pergamon Press, Oxford, 1980) section 145.

les représentations irréductibles du groupe $\mathbf{G}_0$

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{n,i} a_i^{(n)} \phi_i^{(n)}(\mathbf{r}) \tag{4.1}$$

où l'indice i de $\phi_i^{(n)}(\mathbf{r})$ représente les différentes fonctions qui forment le module (la base) pour la représentation irréductible n. Une des représentations irréductibles est celle où toutes les opérations du groupe sont représentées par l'identité. En l'isolant, on peut réécrire

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 + \delta\rho = \rho_0 + \sum_{n \neq 1, i} a_i^{(n)} \phi_i^{(n)}(\mathbf{r}). \tag{4.2}$$

À la transition, le cristal a la symétrie $\mathbf{G}_0$ donc tous les coefficients $a_i^{(n)}$ s'annulent. Pour que la transition soit continue, il faut que les $a_i^{(n)}$ augmentent de façon continue d'au moins un des côtés de la transition (ils peuvent demeurer zéro dans une des phases qui a alors elle aussi la symétrie $\mathbf{G}_0$). Les valeurs des $a_i^{(n)}$ sont déterminées à partir des conditions d'équilibre. Lorsque au moins un des $a_i^{(n)}$ devient différent de zéro, la symétrie de la nouvelle phase est déterminée et elles sera plus petite que celle représentée par $\mathbf{G}_0$. La nouvelle phase sera symétrique sous les transformations d'un sous-groupe de $\mathbf{G}_0$. Par exemple, si on prend un liquide avec invariance sous toutes les rotations continues, il est clair que le solide est invariant seulement sous les opérations d'un sous-groupe du groupe de rotation.

Comme les $a_i^{(n)}$ sont arbitrairement petits à la transition de phase, Landau fait l'hypothèse que le potentiel thermodynamique peut se développer en puissances de ces $a_i^{(n)}$ près de la transition. Le potentiel thermodynamique Γ doit être invariant au point de transition par rapport à toutes les opérations du groupe $\mathbf{G}_0$, donc il ne peut contenir de termes linéaire en $\delta\rho$. Il n'y a qu'un invariant de deuxième odre pour chaque représentation. On peut toujours le réarranger sous la forme,

$$\Gamma = \Gamma_0 + \sum_{n \neq 1} A^{(n)} \sum_i \left[a_i^{(n)} \right]^2 .$$

En posant que les $A^{(n)}$ sont des fonctions continues de la pression et de la température, on a que $A^{(n)} = 0$ à la transition pour toutes les valeurs de n et que pour une des valeurs de n, on a $A^{(n)} > 0$ dans une phase et $A^{(n)} < 0$ dans l'autre phase. Dans la phase où la condition $A^{(n)} > 0$ est satisfaite, la solution d'équilibre est que $a_i^{(n)} = 0$ pour tous les i et tous les n. Dans la phase où un des $A^{(n)}$ est négatif, on minimisera l'énergie avec des valeurs $a_i^{(n)} \neq 0$ pour cette valeur de n. Pour vraiment trouver la valeur des $a_i^{(n)}$, il faut cependant savoir comment les termes d'ordre supérieur se comportent.

- S'il y a des invariants d'ordre trois, la transition peut être du premier ordre.
- Même s'il n'y a que des invariants d'ordre pair, si un des coefficients du terme d'ordre quatre est négatif, la transition peut être du premier ordre.
- Pour les solides, la situation réelle est plus compliqué car la classification des groupes d'espace est plus compliquée.

Exemple 1 *Si on prend le cas d'un aimant où le paramètre d'ordre est un vecteur* $\mathbf{M}$, *l'invariant de deuxième ordre est* $\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}$ *et l'invariant d'ordre quatre est* $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{M})^2$.

Remarque 1 *Comme nous le verrons dans les sections suivantes, la théorie de Landau ne s'applique pas dans beaucoup de cas. Lorsqu'on considère les fluctuations, l'ordre de la transition peut changer. Aussi, il y a eu des propositions récentes où la transition par exemple entre un solide de liens de valence et un antiferroaimant n'entrerait pas du tout dans cette classification de Landau.*

4.5 Effet des fluctuations: approximation gaussienne

Nous démontrerons d'abord, pour le cas simple du modèle de Ising, que la théorie de champ moyen peut être vue comme une approximation à une théorie beaucoup plus générale qui inclue des fluctuations. Puis nous verrons comment traiter les fluctuations dans l'approximation la plus simple. Pour être plus spécifique, nous verrons que la théorie de champ moyen peut être vue comme venant d'un calcul de la fonction de partition dans l'approximation du col. Nous commencerons donc par réviser cette approximation, puis nous démontrerons un petit théorème sur les intégrales gaussiennes qui nous permettra de réécrire la fonction de partition comme une intégrale que nous évaluerons par la suite à l'aide de l'approximation du col.

4.5.1 Approximation du col (saddle-point approximation)

Supposons qu'on doive évaluer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Nf(x)}dx \tag{4.3}$$

où N est grand. On peut supposer que c'est le voisinage de l'endroit où $f(x)$ est minimum qui contribuera le plus à l'intégrale. On peut formaliser ce résultat en faisant le développement limité de $f(x)$ autour de son minimum

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Nf(x)}dx \simeq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Nf(x_0)-\frac{1}{2}N\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-x_0)^2+\cdots}dx \tag{4.4}$$

où x_0 est défini par la valeur de x telle que (en variables complexes ce point est souvent un col de la fonction)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{4.5}$$

L'intégrale à faire est une gaussienne, donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Nf(x)}dx \simeq e^{-Nf(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{N\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}} \tag{4.6}$$

La valeur du logarithm de cette intégrale sera dominée par la valeur de l'argument au col car

$$\ln \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Nf(x)}dx \simeq -Nf(x_0) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\pi}{N\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}\right) + \ldots \tag{4.7}$$

et $\ln N$ est négligeable devant N dans la limite $N \to \infty$. Ce résultat est continuellement utilisé en mécanique statistique. C'est la méthode qui est utilisée par exemple pour dériver la formule de Stirling.

4.5.2 Transformation de Hubbard-Stratonovich

Pour formuler la théorie en fonction de variables continues qu'on pourra par la suite minimiser pour trouver un col qui correspondra à la théorie de champ moyen et les corrections à cette théorie, nous introduisons la transformation de Hubbard-Stratonovich qui ne fait appel à rien d'autre que l'algèbre linéraire et l'intégration d'une gaussienne.

Soit l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\phi^2/2a+\phi S} d\phi \tag{4.8}$$

où S est un opérateur. Si la variable a a une partie réelle positive, l'intégrale converge. On peut faire le développement en série de l'exponentielle d'un opérateur

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\phi^2/2a} e^{\phi S} d\phi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\phi^2/2a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\phi S)^n}{n!}. \tag{4.9}$$

Chaque terme de la série est une intégrale gaussienne qu'on peut faire facilement. On obtiendra une série de puissance en S_i. Cette série est identique à celle que nous aurions obtenue si S_i avait été un simple nombre. Il est donc plus simple de faire directement l'intégrale en complétant le carré

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2a}\phi^2+\phi S} d\phi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2a}(\phi-aS_i)^2+\frac{aS^2}{2}} d\phi = \sqrt{2\pi a} e^{\frac{aS^2}{2}}. \tag{4.10}$$

La généralisation de ce résultat au cas qui nous intéresse se fait de la façon suivante. En notation matricielle

$$\sum_{i,j} \phi_i A_{i,j} \phi_j = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\phi} \; ; \; \sum_i \phi_i S_i = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{S} \tag{4.11}$$

En supposant $\mathbf{A}$ réelle symétrique, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, cette matrice est diagonalisable par une transformation orthonormale: $\mathbf{A} = \mathbf{T}^T \mathbf{D} \mathbf{T}$ où $\mathbf{D}$ est une matrice diagonale et $\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{I}$. Alors, avec la mesure,

$$D\phi \equiv \prod_i d\phi_i \tag{4.12}$$

on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\boldsymbol{\phi}^T \frac{\mathbf{A}}{2} \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{S}} D\phi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{T}^T \frac{\mathbf{D}}{2} \mathbf{T} \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\phi}^T (\mathbf{T}^T \mathbf{T}) \mathbf{S}} D\phi. \tag{4.13}$$

Si toutes les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont réelles positives, l'intégrale converge et peut être faite. Soit le changement de variable $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{T}\boldsymbol{\phi}$. Le jacobien de cette transformation est égal à l'unité parce que $\det \mathbf{T} = 1$. On peut utiliser le résultat scalaire obtenu précédemment pour écrire

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{T}^T \frac{\mathbf{D}}{2} \mathbf{T} \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\phi}^T (\mathbf{T}^T \mathbf{T}) \mathbf{S}} D\phi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\boldsymbol{\psi}^T \frac{\mathbf{D}}{2} \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{T} \mathbf{S}} D\psi \tag{4.14}$$

$$= \sqrt{(2\pi)^N \det \mathbf{D}^{-1}} e^{\mathbf{S} \mathbf{T}^T \frac{1}{2\mathbf{D}} \mathbf{T} \mathbf{S}} \tag{4.15}$$

En retournant dans la base originale, on a donc, pour une matrice $N\times N$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\boldsymbol{\phi}^T\frac{\mathbf{A}}{2}\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{\phi}^T\mathbf{S}}D\phi=\sqrt{(2\pi)^N\det\mathbf{A}^{-1}}e^{\mathbf{S}\frac{\mathbf{A}^{-1}}{2}\mathbf{S}} \tag{4.16}$$

4.5.3 Théorie de champ moyen comme approximation du col

On peut utiliser le résultat précédent pour calculer la fonction de partition du modèle de Ising. En effet il faut calculer

$$Z(\beta)=\mathrm{Tr}e^{\beta\mathbf{S}^T\mathbf{J}'\mathbf{S}+\beta\mathbf{B}'^T\mathbf{S}} \tag{4.17}$$

En faisant l'identification $\beta\mathbf{J}'=\mathbf{A}^{-1}/2$ dans les membres de droite des deux équations précédentes, on obtient

$$\begin{aligned}
Z(\beta,\mathbf{B}') &= \frac{1}{\sqrt{(4\pi\beta)^N\det\mathbf{J}'}}\mathrm{Tr}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\boldsymbol{\phi}^T\frac{\mathbf{J}'^{-1}}{4\beta}\boldsymbol{\phi}+(\boldsymbol{\phi}+\beta\mathbf{B}')^T\mathbf{S}}D\phi && (4.18)\\
&= \frac{1}{\sqrt{(4\pi\beta)^N\det\mathbf{J}'}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\boldsymbol{\phi}^T\frac{\mathbf{J}'^{-1}}{4\beta}\boldsymbol{\phi}}\prod_i\left(e^{-\phi_i-\beta B_i'}+e^{\phi_i+\beta B_i'}\right)D\phi\\
&= \frac{1}{\sqrt{(4\pi\beta)^N\det\mathbf{J}'}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\boldsymbol{\phi}^T\frac{\mathbf{J}'^{-1}}{4\beta}\boldsymbol{\phi}+\sum_i\ln\left(2\cosh\left(\phi_i+\beta B_i'\right)\right)}D\phi && (4.19)
\end{aligned}$$

On remarque que $\mathbf{J}'$ a des éléments de matrice non-nuls seulement à courte distance dans l'Hamiltonien initial, donc $\mathbf{J}'^{-1}$ sera important lui surtout à grande distance (Ceci se voit très bien avec les transformées de Fourier). C'est exactement ce qu'on veut près d'un point critique où le paramètre d'ordre varie lentement sur de grandes distances. La transformation d'Hubbard-Stratonovich a donc l'avantage de nous faire passer à des variables continues ou en plus ce sont celles qui changent à grande distance qui sont les plus importantes.

Pour évaluer le logarithme de $Z(\beta)$ dans l'approximation du col, on trouve l'endroit où l'argument de l'exponentielle dans l'intégrale est maximum et on développe autour de ce maximum. Trouvons d'abord le maximum

$$\frac{\partial}{\partial\phi_i}\left(-\boldsymbol{\phi}^T\frac{\mathbf{J}'^{-1}}{4\beta}\boldsymbol{\phi}+\sum_i\ln\left(2\cosh\left(\phi_i+\beta B_i'\right)\right)\right)=-2\sum_j\frac{1}{4\beta}J_{ij}'^{-1}\phi_j+\tanh\left(\phi_i+\beta B_i'\right)=0. \tag{4.20}$$

Avec le changement de variable $\boldsymbol{\phi}=2\beta\mathbf{J}'\mathbf{M}$, ou en composantes

$$\phi_j=2\beta\sum_k J_{jk}'M_k \tag{4.21}$$

l'équation pour le col donnera

$$\begin{aligned}
-\sum_j J_{ij}'^{-1}\sum_k J_{jk}'M_k &= -\tanh\left(2\beta\sum_k J_{ik}'M_k+\beta B_i'\right) && (4.22)\\
M_i &= \tanh\left(2\beta\sum_k J_{ik}'M_k+\beta B_i'\right) && (4.23)
\end{aligned}$$

ce qui correspond bien au résultat de la théorie de champ moyen ou au résultat de Weiss dans le cas où M_i est indépendant de i. Dans ce dernier cas, la partie de l'énergie libre qui dépend du paramètre d'ordre et qui ne vient que de la valeur de l'argument de l'exponentielle à son minimum s'écrit,

$$F\left(\beta, B'\right) = -\beta^{-1} \ln Z = -\beta^{-1}\left(-\boldsymbol{\phi}^T \frac{\mathbf{J}'^{-1}}{4\beta}\boldsymbol{\phi} + N \ln\left(2\cosh\left(\phi + \beta B'\right)\right)\right) \tag{4.24}$$

Si on réexprime en fonction des variables $M_i = \overline{M}$ Eq.(4.21) dans le cas où la solution est invariante sous translation, on a

$$\begin{aligned}
F &= \sum_{ij} J'_{ij} M_i M_j - \frac{N}{\beta} \ln\left[2\cosh\left(2\beta z J' M + \beta B'\right)\right] && (4.25)\\
&= N\left(zJ'\overline{M}^2 - \beta^{-1}\ln\left[2\cosh\left(2\beta zJ'\overline{M} + \beta B'\right)\right]\right) && (4.26)\\
&= N\left(zJ'\overline{M}^2 - \frac{1}{2\beta}\ln\left[2\cosh^2\left(2\beta zJ'\overline{M} + \beta B'\right)\right]\right) && (4.27)\\
&= N\left(zJ'\overline{M}^2 + \frac{1}{2\beta}\ln\left[\left(1 - \tanh^2\left(2\beta zJ'\overline{M} + \beta B'\right)\right)/2\right]\right) && (4.28)\\
&= N\left(zJ'\overline{M}^2 + \frac{1}{2\beta}\ln\left[\frac{(1-\overline{M}^2)}{2}\right]\right) && (4.29)
\end{aligned}$$

où dans la dernière équation nous avons utilisé l'équation pour le col Eq.(4.23). Il faut se souvenir que F est en fait une fonction de B' donc lorsqu'on écrit $\overline{M}$ ci-dessus, en fait on parle de la valeur de $\overline{M}$ extraite de l'équation du col en fonction de B'.

Remarque 2 *En changeant de variable, vous pouvez vérifier que le résultat précédent Éq.(4.25) est identique à celui trouvé par l'approche variationnelle. Pour retrouver ce résultat avec la théorie de Weiss, il faut faire le changement de variable $S_i^z \to \langle S_i^z \rangle + S_i'^z$ où ce dernier $S_i'^z$ prend encore la valeur $\pm 1/2$. On néglige ensuite les termes d'ordre $(S_i'^z)^2$. En d'autres mots*

$$\begin{aligned}
H &= -\sum_{ij} J_{ij} S_i^z S_j^z - g\mu_B B \sum_i S_i^z && (4.30)\\
&\sim -\sum_{ij} J_{ij}\left\langle S_i^z\right\rangle\left\langle S_j^z\right\rangle - \sum_{ij} J_{ij}\left\langle S_i^z\right\rangle S_j'^z \sum_{ij} J_{ij} S_i'^z \left\langle S_j^z\right\rangle - g\mu_B B \sum_i \left(\left\langle S_i^z\right\rangle + S_i'^z\right)
\end{aligned}$$

puis on calcule la fonction de partition comm avant en sommant sur toutes les configurations possibles de $S_i'^z$.

Pour retrouver l'expression pour Γ, on écrit la transformation de Legendre

$$\Gamma\left(\beta, \overline{M}\right) = F\left(\beta, B'\right) + NB'\overline{M} \tag{4.31}$$

où

$$N\overline{M} = -\frac{\partial F}{\partial B'} = N \tanh\left(2\beta zJ'\overline{M} + \beta B'\right) \tag{4.32}$$

est bien identique à l'équation du col Eq.(4.23). La dérivée partielle par rapport à B' a été évaluée avec l'équation Eq.(4.25) en utilisant le fait que même si $\overline{M}$ dépend de B', $\partial F/\partial\overline{M} = 0$ au col. La valeur de B' est donné par l'équation du col

$$2\beta zJ'\overline{M} + \beta B' = \tanh^{-1}\overline{M} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\overline{M}}{1-\overline{M}}\right) \tag{4.33}$$

d'où, la partie de Γ qui dépend du paramètre d'ordre s'écrit,

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\beta,\overline{M}\right) &= F\left(\beta,B'\right)+NB'\overline{M} && (4.34)\\
&= F\left(\beta,B'\right)+N\left[\frac{1}{2\beta}\ln\left(\frac{1+\overline{M}}{1-\overline{M}}\right)-2zJ'\overline{M}\right]\overline{M} && (4.35)\\
\frac{\Gamma\left(\beta,\overline{M}\right)}{N} &= -zJ'\overline{M}^2+\frac{1}{2\beta}\ln\left[\frac{\left(1-\overline{M}\right)\left(1+\overline{M}\right)}{2}\right]+\frac{\overline{M}}{2\beta}\ln\left(\frac{1+\overline{M}}{1-\overline{M}}\right) && (4.36)\\
\overline{\Gamma}\left(\beta,\overline{M}\right) &= -zJ'\overline{M}^2+\frac{1}{\beta}\left[\frac{\left(1-\overline{M}\right)}{2}\ln\left(\frac{1-\overline{M}}{2}\right)+\frac{\left(1+\overline{M}\right)}{2}\ln\left(\frac{1+\overline{M}}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

ce qui correspond bien au résultat trouvé auparavant par la méthode variationnelle. Pour interpréter le dernier terme comme $-TS$, il suffit de remarquer que si $P_\uparrow$ et $P_\downarrow$ sont les probabilités d'avoir un spin up ou un spin down respectivement, on a $P_\uparrow+P_\downarrow=1$ et $P_\uparrow-P_\downarrow=\overline{M}$ d'où on extrait $P_\uparrow=(1+\overline{M})/2$ et $P_\downarrow=\left(1-\overline{M}\right)/2$ ce qui donne finalement $S=-k_B\left(P_\uparrow\ln P_\uparrow+P_\downarrow\ln P_\downarrow\right).$

4.5.4 Fluctuations gaussiennes

Dans la phase désordonnée à haute température, $\overline{M}=0$. La fonction de partition avec la transformation Hubbard-Stratonovich correspondante à $B'=0$ s'écrit donc

$$Z\left(\beta,B'=0\right)=\frac{1}{\sqrt{\left(4\pi\beta\right)^N\det\mathbf{J}'}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\phi^T\frac{\mathbf{J}'^{-1}}{4\beta}\phi+\sum_i\ln(2\cosh(\phi_i))}D\phi \qquad (4.37)$$

En faisant un nouveau changement de variable de ϕ_i à $\overline{M}_i$ de la façon suivante $\boldsymbol{\phi}=\sqrt{2\beta\mathbf{J}'}\mathbf{M}$ la mesure se transforme comme suit

$$D\phi=\left(\left(2\beta\right)^{N/2}\det\mathbf{J}'^{1/2}\right)D\overline{M}.$$

Remarque 3 *La racine carré d'une matrice est définie de la façon suivante. Si* $\mathbf{T}$ *diagonalise* $\mathbf{J}'$*, alors*

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}' &= \mathbf{T}^T\mathbf{D}\mathbf{T}=\mathbf{T}^T\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{T} && (4.38)\\
&= \left(\mathbf{T}^T\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{T}\right)\left(\mathbf{T}^T\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{T}\right)=\mathbf{J}'^{1/2}\mathbf{J}'^{1/2} && (4.39)
\end{aligned}$$

Remarquez que $\det\mathbf{J}'^{1/2}=\sqrt{\det\mathbf{J}'}$.

Après avoir fait le développement $\ln\left(\cosh\left(x\right)\right)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4+O\left(x^6\right)$, on obtient (il y a une somme sur les indices répétés), en négligeant les termes quartiques, (on note simplement qu'ils ont le bon signe pour que l'intégrale converge à grand $\overline{M}$),

$$\begin{aligned}
\sum_i\ln\left(2\cosh\left(\phi_i\right)\right) &= \sum_i\ln\left(2\cosh\left(\left(\sqrt{2\beta\mathbf{J}'}\right)_{i,j}\overline{M}_j\right)\right) && (4.40)\\
&\simeq \frac{1}{2}\left(2\beta\mathbf{J}'\right)^{1/2}_{i,j}\overline{M}_j\left(2\beta\mathbf{J}'\right)^{1/2}_{i,k}\overline{M}_k+\ln 2 && (4.41)\\
&= \frac{1}{2}\overline{M}_j\left(2\beta\mathbf{J}'\right)^{1/2}_{j,i}\left(2\beta\mathbf{J}'\right)^{1/2}_{i,k}\overline{M}_k+\ln 2 && (4.42)\\
&= \frac{\beta}{2}2\overline{M}_j\mathbf{J}'_{j,k}\overline{M}_k+\ln 2 && (4.43)\\
\boldsymbol{\phi}^T\frac{\mathbf{J}'^{-1}}{4\beta}\boldsymbol{\phi} &= \frac{1}{2}\overline{\mathbf{M}}^T\overline{\mathbf{M}} && (4.44)
\end{aligned}$$

On a utilisé dans la troisième ligne le fait que $\mathbf{J}'_{j,i}=\mathbf{J}'_{i,j}$. De là on extrait, ,

$$Z\left(\beta,B'=0\right) = \frac{\left(2\beta\right)^{N/2}\det\mathbf{J}'^{1/2}}{\sqrt{\left(4\pi\beta\right)^{N}\det\mathbf{J}'}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\beta}{2}\left[\frac{1}{\beta}\overline{\mathbf{M}}^{T}\overline{\mathbf{M}}-\left(2\overline{\mathbf{M}}^{T}\mathbf{J}'\overline{\mathbf{M}}\right)\right]}D\overline{M} \tag{4.45}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\beta}{2}\left[\frac{1}{\beta}\overline{\mathbf{M}}^{T}\overline{\mathbf{M}}-\left(2\overline{\mathbf{M}}^{T}\mathbf{J}'\overline{\mathbf{M}}\right)\right]}D\overline{M} \tag{4.46}$$

$$= Z_0\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\beta}{2}\left[\overline{\mathbf{M}}^{T}\mathbf{G}^{-1}\overline{\mathbf{M}}\right]}D\overline{M} \tag{4.47}$$

où Z_0 est une constante et

$$\left(\mathbf{G}^{-1}\right)_{i,j}=-2J'_{i,j}+\frac{\delta_{i,j}}{\beta}. \tag{4.48}$$

Pour faire l'intégrale en permettant les fluctuations spatiales, on passe en transformée de Fourier où chaque mode devient indépendant. On définit ces transformées de Fourier en utilisant les résultats

$$\frac{1}{N}\sum_{i}e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)} = \delta_{\mathbf{q},\mathbf{0}} \tag{4.49}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{q}}e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)} = \delta_{i,j} \tag{4.50}$$

qui permettent d'écrire

$$\overline{M}\left(\mathbf{q}\right)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i}e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i}\overline{M}_i \tag{4.51}$$

$$\overline{M}_i=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{q}}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i}\overline{M}\left(\mathbf{q}\right) \tag{4.52}$$

De là,

$$\overline{\mathbf{M}}^{T}\mathbf{G}^{-1}\overline{\mathbf{M}} = \sum_{i,j}\overline{M}_i\left(\mathbf{G}^{-1}\right)_{i,j}\overline{M}_j \tag{4.53}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i,j}\sum_{\mathbf{q}}\sum_{\mathbf{q}'}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_i}\overline{M}\left(\mathbf{q}\right)\left(\mathbf{G}^{-1}\right)_{i,j}e^{i\mathbf{q}'\cdot\mathbf{r}_j}\overline{M}\left(\mathbf{q}'\right). \tag{4.54}$$

Comme J'_{ij} ne dépend que de $\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j$, on pose $\mathbf{r}_i=\mathbf{R}+\frac{\mathbf{r}}{2}$, $\mathbf{r}_j=\mathbf{R}-\frac{\mathbf{r}}{2}$. En faisant la somme sur $\mathbf{R}$, on obtient $\delta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}',\mathbf{0}}$ ce qui permet de faire la somme sur $\mathbf{q}'$. Il ne reste que

$$\sum_{\mathbf{r}}\sum_{\mathbf{q}}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}G^{-1}\left(\mathbf{r}\right)\overline{M}\left(\mathbf{q}\right)\overline{M}\left(-\mathbf{q}\right)=\sum_{\mathbf{q}}G^{-1}\left(\mathbf{q}\right)\overline{M}\left(\mathbf{q}\right)\overline{M}\left(-\mathbf{q}\right) \tag{4.55}$$

$$G^{-1}\left(\mathbf{q}\right)=-2J'\left(\mathbf{q}\right)+\beta^{-1} \tag{4.56}$$

Qui correspond bien à la définition donnée antérieurement.

Exemple 2 *En trois dimensions par exemple,*

$$G^{-1}\left(\mathbf{q}\right) = -4J'\left(\cos q_xd_0+\cos q_yd_0+\cos q_zd_0\right)+\beta^{-1}$$

$$= -\frac{1}{3}k_BT_c\left(\cos q_xd_0+\cos q_yd_0+\cos q_zd_0\right)+k_BT \tag{4.57}$$

$$\simeq k_B\left(T-T_c\right)+\left(\frac{k_BT_c}{6}d_0^2\right)q^2 \tag{4.58}$$

$$\simeq k_B\left(T-T_c\right)\left(1+\left(\frac{T_c}{6\left(T-T_c\right)}d_0^2\right)q^2\right) \tag{4.59}$$

On voit bien que pour $T > T_c$ l'intégrale convergera tel que promis. En dimension quelconque, à grande longueur d'onde ou petite valeur de $\mathbf{q}$, on obtient (avec z le nombre de premiers voisins

$$G^{-1}(\mathbf{q}) \simeq k_B (T - T_c)\left(1 + \left(\frac{T_c}{z(T - T_c)} d_0^2\right) q^2\right) \tag{4.60}$$

$$\equiv 2\left(a(T) + cq^2\right) \tag{4.61}$$

$$= ta''\left(1 + \xi^2 q^2\right) \tag{4.62}$$

où

$$a(T) \equiv \frac{k_B}{2}(T - T_c)\ ;\ c \equiv \frac{k_B T_c}{2z} d_0^2 \tag{4.63}$$

$$t \equiv \frac{(T - T_c)}{T_c}\ ;\ a'' = k_B T_c\ ;\ \xi^2 = \frac{\xi_0^2}{t}\ ;\ \xi_0^2 = \frac{d_0^2}{z} \tag{4.64}$$

Comme la transformation qui passe de $\overline{M}_i$ à $\overline{M}(\mathbf{q})$ est unitaire, le jacobien est égal à l'unité. Cependant, comme $\overline{M}_i$ est réel, on a une relation entre $\overline{M}(\mathbf{q})$ et $\overline{M}(-\mathbf{q})$, soit

$$\overline{M}(-\mathbf{q}) = \overline{M}(\mathbf{q})^*. \tag{4.65}$$

On a donc $N/2$ valeurs de $\mathbf{q}$ seulement qui sont indépendants, mais comme $\overline{M}(\mathbf{q})$ est complexe, il y a autant de variables à intégrer qu'au départ. Sous le changement de variable, la mesure se transforme donc ainsi

$$D\overline{M} = \prod_{\mathbf{q}}{}^{*} d\overline{M}(\mathbf{q})\, d\overline{M}(-\mathbf{q}) \tag{4.66}$$

L'indice supérieur $*$ à la somme rappelle que chaque fois qu'un vecteur $\mathbf{q}$ est compté, le vecteur $-\mathbf{q}$ ne l'est pas. Comme on a l'égalité $\overline{M}(\mathbf{q})\overline{M}(-\mathbf{q}) = \operatorname{Re}\overline{M}(\mathbf{q})^2 + \operatorname{Im}\overline{M}(\mathbf{q})^2$ on veut utiliser ces variables d'intégration. Comme

$$\overline{M}(\mathbf{q}) = \operatorname{Re}\overline{M}(\mathbf{q}) + i\operatorname{Im}\overline{M}(\mathbf{q})\ ;\ \overline{M}(-\mathbf{q}) = \operatorname{Re}\overline{M}(\mathbf{q}) - i\operatorname{Im}\overline{M}(\mathbf{q}) \tag{4.67}$$

le jacobien de la transformation est donné par 2. Donc,

$$d\overline{M}(\mathbf{q})\, d\overline{M}(-\mathbf{q}) = 2id\operatorname{Re}\overline{M}(\mathbf{q})\, d\operatorname{Im}\overline{M}(\mathbf{q}). \tag{4.68}$$

La fonction de partition 4.47 écrite avec ces nouvelles variables factorise car $G^{-1}(\mathbf{q})$ est diagonale.

$$Z(\beta, B' = 0) = Z_0' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta}{2}\sum_{\mathbf{q}} G^{-1}(\mathbf{q})(\operatorname{Re}\overline{M}(\mathbf{q})^2 + \operatorname{Im}\overline{M}(\mathbf{q})^2)} \tag{4.69}$$

$$\prod_{\mathbf{q}}{}^{*} d\operatorname{Re}\overline{M}(\mathbf{q})\, d\operatorname{Im}\overline{M}(\mathbf{q}) \tag{4.70}$$

Dans l'argument on peut sommer sur la moitié des valeurs de $\mathbf{q}$ à condition de multiplier par un facteur deux, donc

$$F = -\beta^{-1}\ln Z = \text{ termes non singuliers } + \tag{4.71}$$
$$-\beta^{-1}\sum_{\mathbf{q}}{}^{*}\ln\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta G^{-1}(\mathbf{q})(\operatorname{Re}\overline{M}(\mathbf{q})^2 + \operatorname{Im}\overline{M}(\mathbf{q})^2)} d\operatorname{Re}\overline{M}(\mathbf{q})\, d\operatorname{Im}\overline{M}(\mathbf{q})\right]$$

Pour calculer $\left\langle\overline{M}(\mathbf{q})\overline{M}(-\mathbf{q})\right\rangle = \left\langle\operatorname{Re}\overline{M}(\mathbf{q})^2 + \operatorname{Im}\overline{M}(\mathbf{q})^2\right\rangle$ avec la fonction de partition ci-dessus, il suffit d'utiliser les propriétes de la gaussienne $\left(\text{on identifie } \sigma^2 = G(\mathbf{q})/(2\beta)\right)$ pour obtenir

$$\left\langle\operatorname{Re}\overline{M}(\mathbf{q})^2 + \operatorname{Im}\overline{M}(\mathbf{q})^2\right\rangle = k_B T G(\mathbf{q}) \tag{4.72}$$

Il ne reste qu'à voir section 4.5 des notes de Claude Bourbonnais.

4.6 Critère de Ginzburg

Il ne reste qu'à voir section 4.5 des notes de Claude Bourbonnais et le devoir

4.7 Lois d'échelle, invariance d'échelle[2]

À l'aide d'arguments physiques simples, on peut établir des relations entre les exposants critiques. Dans un premier temps les relations finales entre exposants n'impliquent pas la dimension du système et sont donc valables même en théorie de Landau. Une relation supplémentaire qui implique la dimension physique du système n'est valable que lorsqu'il y a invariance d'échelle, ce qu'on retrouve dans la théorie des phénomènes critiques lorsque la dimension est plus petite que celle où la théorie de Landau s'applique (dimension critique supérieure) et plus grande que celle où l'ordre à longue portée disparaît (dimension critique inférieure).

4.7.1 Lois d'échelle

Définition 3 *On adopte la convention que $A \sim B$ veut dire "que A varie asymptotiquement (i.e. suffisamment près du point critique) comme B".*

On sait qu'un champ magnétique peut induire un paramètre d'ordre non-nul $M = \chi B$. Donc, étant donné le comportement critique de χ en fonction de $t \equiv \frac{(T-T_c)}{T_c}$

$$M \sim |t|^{-\gamma} B \tag{4.73}$$

Supposons qu'on applique un champ magnétique suffisamment fort pour que l'aimantation induite soit de l'ordre de l'aimantation spontannée

$$M \sim |t|^{\beta} \tag{4.74}$$

on a alors, à partir des deux équations précédentes,

$$B \sim |t|^{\beta+\gamma} . \tag{4.75}$$

Pour un tel champ magnétique, l'énergie magnétique $-MB \sim -|t|^{\beta} B$ est comparable à l'énergie thermique, qu'on peut estimer à partir de $t^2 C \sim |t|^{2-\alpha}$ (puisque la chaleur spécifique est la deuxième dérivée par rapport à la température de l'énergie libre). On a donc une autre expression pour le champ magnétique

$$B \sim |t|^{2-\alpha-\beta} \tag{4.76}$$

L'égalité des deux dernières équations nous donne (J.W.Essam et M.E. Fisher 1963)

$$\boxed{\alpha+2\beta+\gamma=2} \tag{4.77}$$

[2] E.M. Lifshitz and L.P. Pitaevskii, "Statistical Physics, 3rd edition, Part 1", (Pergamon Press, Oxford, 1980) section 148

Si on est dans le régime où il faut appliquer un grand champ magnétique pour atteindre une valeur d'aimantation $M \sim |t|^{\beta}$ le paramètre d'ordre induit prend plutôt la forme

$$M \sim B^{1/\delta} \tag{4.78}$$

(c'est comme si l'effet de $|t|$ était négligeable devant B). L'égalité du paramètre d'ordre induit et du paramètre d'ordre spontanné se produit alors lorsque

$$B \sim M^{\delta} \sim |t|^{\beta\delta} . \tag{4.79}$$

Il y a un régime intermédiaire où on passe de champ fort à champ faible. Dans ce régime, les deux estimés, Eqs.(4.75) et (4.79) devraient être valables. Alors,

$$|t|^{\beta\delta} \sim |t|^{\beta+\gamma} . \tag{4.80}$$

Comme ceci peut se produire pour une valeur quelconque de $|t|$ il faut que (B. Widom 1964)

$$\boxed{\beta\delta{=}\beta{+}\gamma.} \tag{4.81}$$

Comme δ ne peut pas dépendre du signe de $|t|$, et que β n'est défini que pour $t < 0$, cela nous dit que $\gamma = \gamma'$, i.e. l'exposant critique pour la susceptibilité est le même en haut et en bas de T_c. La relation dans l'équation Eq.(4.77) nous dit alors que $\alpha = \alpha'$ aussi.

Nous pouvons aussi relier l'exposant relié à la fonction de corrélation avec les autres. En effet, dans un volume V suffisamment grand,

$$\frac{1}{V^2}\int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \left\langle \overline{M}\left(\mathbf{r}_1\right)\overline{M}\left(\mathbf{r}_2\right)\right\rangle = \frac{1}{V}\int d^3\mathbf{r}\mathbf{G}\left(\mathbf{r}\right) \tag{4.82}$$

$$= \frac{T_c}{V}\chi \sim |t|^{-\gamma} . \tag{4.83}$$

Or la valeur de l'intégrale est déterminée par la région de l'espace de l'ordre de ξ où la fonction de corrélation ne s'annule pas et prend la valeur

$$G\left(\mathbf{r}\right) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}}. \tag{4.84}$$

Par analyse dimensionnelle on peut donc estimer la valeur de l'intégrale par

$$\frac{\xi^d}{\xi^{d-2+\eta}} \sim \xi^{2-\eta} \sim |t|^{-\nu(2-\eta)} . \tag{4.85}$$

En comparant avec $|t|^{-\gamma}$ obtenu ci-dessus, on obtient immédiatement que

$$\boxed{\nu\left(2-\eta\right){=}\gamma.} \tag{4.86}$$

Remarque 4 *On vérifie aisément que la théorie de Landau satisfait les trois équations encadrées de cette sous-section.*

Remarque 5 *La dépendance en $|t|$ et en B du paramètre d'ordre peut s'obtenir à partir de (pour $B > 0$)*

$$M = B^{1/\delta} g\left(\frac{-t}{B^{1/(\delta\beta)}}\right). \tag{4.87}$$

En effet, il suffit que (a) $g\left(x \to 0\right) \to$ cte lorsque $B^{1/\delta} >> |t|$ pour retrouver $M \sim B^{1/\delta}$ (b) que $g\left(x \to \infty\right) \to x^{\beta}$ lorsque $B \to 0$ et $t < 0$, pour retrouver $M \sim (-t)^{\beta}$ (c) que $g\left(x \to -\infty\right) \to \left(-x\right)^{-\gamma}$ lorsque $B \to 0$ et $t > 0$ pour retrouver

$M \sim B^{1/\delta}\left(\frac{t}{B^{1/(\delta\beta)}}\right)^{-\gamma} \sim \left(B^{1/\delta+\gamma/(\delta\beta)}\right)t^{-\gamma} \sim B^{(\beta+\gamma)/(\beta\delta)}t^{-\gamma} \sim Bt^{-\gamma}$ en utilisant la relation de Widom Eq.(4.81). La fonction g décrit le passage (crossover) entre la situation où B domine et celle où $|t|$ domine. Tant qu'on est à $B \neq 0$, la fonction g est continue en fonction de t car on est pas au point de transition. Tout ce qui change dans les considérations ci-dessus lorsque $B < 0$, c'est que $B \to -B$ et $M \to -M$.

4.7.2 Invariance d'échelle

Le critère pour la validité de la théorie de Landau peut être formulée d'une autre façon.

Définition 4 *r_0 est le volume où les fluctuations du paramètre d'ordre sont comparables à la valeur moyenne du paramètre d'ordre en équilibre.*

On peut trouver r_0 de la façon suivante. Estimons les fluctuations dans un volume $V = r_0^3$ à l'aide de l'équation Eq.(4.82). On obtient

$$\left\langle \Delta\overline{M}\Delta\overline{M}\right\rangle \sim \frac{1}{r_0^{d-2+\eta}} \tag{4.88}$$

Évidemment, plus r_0 est petit, plus les fluctuations sont grandes. On pose ce résultat égal à $M^2 \sim |t|^{2\beta}$. Cela nous donne

$$r_0 \sim |t|^{-2\beta/(d-2+\eta)} \tag{4.89}$$

En théorie de Landau, il faut que r_0 soit beaucoup plus petit que la longueur de corrélation $\xi \gg r_0$. En d'autres mots, il faut que lorsqu'on a atteint une distance plus grande que r_0, les fluctuations deviennent petites par rapport au carré du paramètre d'ordre. Celui-ci répond à une perturbaton externe sur une distance plus grande, soit ξ. En effet, on a obtenu cette longueur en théorie de Landau en supposant qu'on pouvait négliger les fluctuations du paramètre d'ordre. En théorie de Landau avec $d = 3$, $\eta = 0$, $\beta = 1/2$, on a

$$r_0 \sim |t|^{-1} \tag{4.90}$$

alors que la longueur de corrélation obéit à

$$\xi \sim |t|^{-1/2} \tag{4.91}$$

La longueur r_0 croit donc beaucoup plus rapidement que ξ. C'est une autre façon de retrouver le critère de Ginzburg. Tant que r_0 est beaucoup plus petit que ξ, i.e. tant qu'on est pas trop près de T_c, la théorie de Landau (ou de champ moyen en général) s'applique. Suffisamment près du point critique, les considératons précédentes montent que la théorie de Landau ne s'applique plus en trois dimensions. Lorsque $r_0 \sim \xi$, r_0 dans la théorie correcte ne grandit plus et il n'y a plus qu'une échelle de longueur dans le problème qui est ξ. En remplaçant r_0 par ξ dans l'équation pour r_0 Eq.(4.89), on obtient

$$\xi \sim |t|^{-2\beta/(d-2+\eta)} \sim |t|^{-\nu} \tag{4.92}$$

ou $(d-2+\eta)\,\nu = 2\beta$. Mais la relation de Widom Eq.(4.81) nous donne que $\nu\,(2-\eta) = \gamma$. Donc, $d\nu = 2\beta + \gamma$, ou bien en utilisant la relation de Essam Fisher Eq.(4.77)

$$\boxed{d\nu = 2 - \alpha}. \tag{4.93}$$

Cette relation est la relation dite d'*hyperscaling***.** La dérivation montre qu'elle n'est évidemment pas satisfaite pour la théorie de Landau. C'est clair aussi puisque les exposants ne dépendent pas de la dimension en champ moyen.

4.8 Groupe de renormalisation (un aperçu)

À T_c, la longueur de corrélation devient infinie. Il n'y a donc plus d'échelle de longueur pertinente. On s'attend donc à ce que la théorie soit invariante d'échelle à la transition. En d'autres mots, partons de (on écrit h plutôt que B)

$$Z = \int DM \exp\left[-\int d^d\mathbf{r}\left(hM + \left(tM^2 + c\left(\nabla M\right)^2\right) + uM^4 + vM^6 + \cdots\right)\right]. \tag{4.94}$$

On remarque que le fait que l'énergie libre ne soit pas analytique à la transition ne permet pas le développement de Landau. Cependant, comme argument dans l'exponentiel, le développement est permis puisqu'il représente l'énergie libre sur des distances relativement courtes. On trouve à la fin (on justifie à postériori) que cette forme *gros grains* (coarse grained) de l'argument de l'exponentielle est cohérent.

L'invariance d'échelle, de façon plus précise, veut dire qu'il y a des valeurs des paramètres entrant dans la fonction de partition ci-dessus qui sont tels que si

(1) on intègre les $M(\mathbf{q})$ pour de grands $\mathbf{q}$ compris entre la coupure (le cut-off) Λ (qui est le pas du réseau au départ) et Λ/s où s est un facteur d'échelle infinitésimalement près de l'unité (la nouvelle coupure pour q est Λ/s)

(2) on change l'échelle des vecteurs d'onde de telle sorte que $q' = sq$ ait la même coupure Λ que la théorie de départ

alors on retombe exactement sur la même théorie. Ces deux opérations définissent ce qu'on appelle un groupe de renormalisation (ou plus précisément un semi-groupe car l'inverse de l'étape (1) n'est pas définie). La théorie invariante d'échelle s'appelle un point fixe. Elle correspond au point de transition.

Pour clarifier les idées, faisons l'étape (2) , changement d'échelle, explicitement dans l'expression de la fonction de partition ci-dessus. Comme $q' = sq$, cela veut dire pour les distances que $sr' = r$. Comme M n'est qu'une variable d'intégration, on peut aussi changer sa définition comme on veut. Choisissons donc $M = s^m M'$. Il reste,

$$Z = s^{-mN}\int DM' \exp\left[\begin{array}{c} -\int d^d\mathbf{r}' s^d\left(hs^m M' + \left(ts^{2m}M'^2 + cs^{2m-2}\left(\nabla' M'\right)^2\right)\right. \\ \left. +us^{4m}M'^4 + vs^{6m}M'^6 + \cdots\right) \end{array}\right]. \tag{4.95}$$

Pour que la théorie qu'on cherche soit non-triviale, il faut que le coefficient du gradient reste constant sinon chaque site devient indépendant. Choisissons donc m tel que $s^{d+2m-2} = 1$, i.e. $m = 1 - \frac{d}{2}$. La nouvelle théorie a exactement la même forme que la théorie de départ à condition de définir

$$h' = s^{d+m}h = s^{\frac{d}{2}+1}h \tag{4.96}$$
$$t' = s^{d+2m}t = s^2 t \tag{4.97}$$
$$u' = s^{d+4m}u = s^{4-d}u \tag{4.98}$$
$$v' = s^{d+6m}v = s^{6-2d}v \tag{4.99}$$

Les relations ci-dessus sont des relations de récurrence qui définissent comment les paramètres se transforment sous changement d'échelle. Des relations analogues existeront si on fait les deux étapes prescrites ci-dessus. Dans le jargon, on dit que ces relations définissent l'écoulement (flow) des paramètres de l'hamiltonien sous renormalisation. La tendance est claire dans notre cas simple. Si $d > 4$, il suffit de choisir $t = 0$ et $h = 0$ pour qu'après avoir itéré suffisamment, la théorie converge vers un *point fixe* où $u' = 0, v' = 0$. Ces paramètres qui convergent vers 0 sont dits non-pertinents (irrelevant). Dans notre cas simple, la théorie résultante est la théorie gaussienne à $T = T_c$ qui ne contient que le terme $(\nabla M)^2$. Les modes de fluctuations sont indépendants, contrairement au cas où le terme en M^4 est présent. Le fait que plein de constantes de couplages (coefficients des termes en M^x) itèrent vers zéro (sont non-pertinents) montre bien comment plusieurs détails microscopiques ne sont pas pertinents pour décrire le comportement au point critique.

En d plus petit que 4, (mais d suffisamment grand pour qu'il y ait de l'ordre) la théorie de point fixe aura une forme où tous coefficients à partir de v' (i.e. ceux des pluissances de M plus grandes ou égales à 6) tendront vers 0. La théorie sera non-triviale et non-gaussienne parce qu'il y aura une valeur non-nulle du coefficient de M^2 et de celui de M^4. Il y aura, comme ci-dessus, deux paramètres pertinents (relevant), i.e. qui grandissent sous renormalisation. L'énergie libre ne dépendra que de ces paramètres. Autrement dit, on pourra dire que l'énergie libre par unité de volume peut s'écrire

$$f(t,h) = \frac{1}{s^d} f\left(ts^{y_t}, hs^{y_h}\right). \tag{4.100}$$

On peut relier les exposants y_t et y_h aux exposants définis précédemment. Par exemple

$$\begin{aligned} m(t,h=0) &= \left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_{h=0} = \frac{1}{s^d} \left.\frac{\partial f\left(ts^{y_t}, hs^{y_h}\right)}{\partial h}\right|_{h=0} \\ &= \frac{s^{y_h}}{s^d} \left.\frac{\partial f\left(ts^{y_t}, hs^{y_h}\right)}{\partial\left(hs^{y_h}\right)}\right|_{h=0} = \frac{s^{y_h}}{s^d} m\left(ts^{y_t}, 0\right) \end{aligned} \tag{4.101}$$

Si on choisit $s^{y_t} = t^{-1}$, on trouve que

$$m(t,0) = \left(t^{-1/y_t}\right)^{y_h - d} m(1) \tag{4.102}$$

d'où

$$\beta = \frac{d - y_h}{y_t}. \tag{4.103}$$

On a en plus en bonus que comme $s = t^{-1/y_t}$ donne la loi de transformation des longueurs puisque $sr' = r$,

$$\nu = 1/y_t \tag{4.104}$$

Une dérivée supplémentaire par rapport à h nous donne

$$\chi(t,h=0) = \left(t^{-1/y_t}\right)^{2y_h - d} \chi(1,0) \tag{4.105}$$

d'où on déduit que

$$\gamma = \frac{2y_h}{y_t} - \frac{d}{y_t}. \tag{4.106}$$

En dérivant deux fois l'énergie libre par rapport à t pour trouver la chaleur spécifique, on trouve

$$C(t,0) = \frac{s^{2y_t}}{s^d} \left.\frac{\partial^2 f\left(ts^{y_t}, 0\right)}{\partial\left(ts^{y_t}\right)^2}\right|_{h=0} = \frac{s^{2y_t}}{s^d} C\left(ts^{y_t}, 0\right) \tag{4.107}$$

et donc, en choisissant encore une fois $s = t^{-1/y_t}$ on a

$$C(t,0) = \left(t^{-1/y_t}\right)^{2y_t - d} \tag{4.108}$$

d'où

$$\alpha = 2 - \frac{d}{y_t}. \tag{4.109}$$

On reconnaît la relation d'hyperscaling lorsqu'on utilise le résultat obtenu ci-dessus $\nu = 1/y_t$. On vérifie aussi, par exemple, la relation de Essam-Fisher.

$$a + 2\beta + \gamma = 2 - \frac{d}{y_t} + 2\left(\frac{d}{y_t} - \frac{y_h}{y_t}\right) + \frac{2y_h}{y_t} - \frac{d}{y_t} = 2 \tag{4.110}$$

Pour trouver l'exposant δ, on part encore de l'équation d'échelle pour la densité d'énergie libre. Cela donne,

$$\begin{aligned} m(t=0,h) &= \left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_{t=0} = \frac{1}{s^d} \left.\frac{\partial f\left(ts^{y_t}, hs^{y_h}\right)}{\partial h}\right|_{t=0} \\ &= \frac{s^{y_h}}{s^d} \left.\frac{\partial f\left(ts^{y_t}, hs^{y_h}\right)}{\partial\left(hs^{y_h}\right)}\right|_{t=0} = \frac{s^{y_h}}{s^d} m\left(0, hs^{y_h}\right) \end{aligned} \tag{4.111}$$

En choisissant $s^{y_h} = h^{-1}$ dans cette équation, on retrouve

$$m(t=0,h) = h^{-1+d/y_h} m(0,1) \tag{4.112}$$

d'où

$$\delta^{-1} = -1 + d/y_h \ ; \ \delta = \frac{y_h}{d - y_h}. \tag{4.113}$$

Les exposants ne peuvent pas dépendre des détails microscopiques car la théorie n'a pas de longueur microscopique apparaissant explicitement (sauf dans la relation entre h_c, T_c et les quantités microscopiques). Les exposants ne dépendent que de propriétés de symétrie très générales comme la dimension de l'espace et la symétrie du paramètre d'ordre. Comme en d plus grand que quatre la théorie est gaussienne et facilement soluble, on peut "comprendre" qu'il soit possible d'obtenir les exposants comme une série en puissances de $\varepsilon = 4 - d$. (voir la dépendance en $4 - d$ de la relation de récurrence pour u, Eq.(4.98)) C'est fait en pratique. On peut aussi obtenir les exposants en puissances de $1/n$ où n est le nombre de composantes du paramètre d'ordre. On dit que les exposants apparaissent à des "*classes d'universalité*" qui sont déterminées par la dimension de l'espace, la symétrie du paramètre d'ordre et la portée des forces. En fait, même certains aspects des fonctions comme f ci-dessus sont universels dans le sens qu'on vient de décrire.

Remarque 6 *Les phases ordonnées ou désorsonnées sont décrites par des points fixes triviaux, i.e. des points fixes où il n'y a plus d'interaction car, après avoir renormalisé suffisamment, on contemple des longueurs qui sont plus grandes que la longueur de corrélation. Dans une phase ordonnée loin du point critique, ce n'est plus la valeur des exposants qui compte.*

Remarque 7 *En théorie des phénomènes critiques, on abandonne l'idée de calculer T_c par exemple pour se concentrer sur la valeur des exposants et autres quantités universelles.*