

7. CONDENSATION DE BOSE-EINSTEIN ET ÉTATS COHÉRENTS

7.1 États cohérents

7.2 Condensation de Bose-Einstein¹

Le phénomène en titre a été prédit par Einstein en 1925 et observé 70 ans plus tard en 1995 après de nombreuses années de travail qui ont permis de fabriquer des gaz extrêmement dilués et près du zéro absolu. Nous allons d'abord expliquer le phénomène théoriquement et démontrer comment il peut survivre à une température différente du zéro absolu et aux interactions. En fait les interactions sont essentielles pour l'existence du phénomène de superfluidité. Ensuite nous nous attarderons à la façon dont on s'y prend pour observer assez directement la condensation de Bose-Einstein. La superfluidité de ^4He est une conséquence de la condensation de Bose-Einstein, mais comme les interactions sont fortes dans ce liquide, il n'est pas facile à comprendre à partir de calculs simples. C'est pourquoi nous nous attarderons au cas des atomes froids.

7.2.1 Condensation de Bose-Einstein à température finie

Le physicien indien Bose a proposé pour les photons ($\mu = 0$) la distribution qui porte son nom. Incapable de faire publier ses résultats, il plaide auprès d'Einstein qui intervient auprès des éditeurs et qui généralise le résultat de Bose au cas des atomes (ne connaissant pas l'existence de fermions) et découvre le phénomène de condensation.

Physiquement, les effets quantiques apparaîtront lorsque la longueur d'onde thermique de de Broglie $\hbar^2 \xi_{th}^{-2} / 2m \sim k_B T_c$ deviendra égale à la séparation entre les particules $\ell \sim (N/V)^{1/3} = n^{1/3}$. Ceci se produira donc pour $\xi_{th} \sim (\hbar^2 / 2m k_B T_c)^{1/2} \sim n^{1/3}$, or

$$k_B T_c \sim n^{2/3} (\hbar^2 / 2m)^{1/2}. \quad (7.1)$$

Nous avons déjà vu que le fondamental d'une assemblée de N bosons à une composante dans le cas sans interaction est donné par

$$|\Omega_N\rangle = \frac{(a_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^\dagger)^N}{\sqrt{N!}} |0\rangle \quad (7.2)$$

où $a_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^\dagger$ crée une particule dans l'état $\mathbf{k} = \mathbf{0}$. Que se passe-t-il à température finie? Dans l'ensemble grand canonique on peut calculer la fonction de partition et en

¹J.F. Annett, Superconductivity, Superfluids and condensates, Chap. 1

extraire le nombre de particules dans un état \mathbf{k}

$$\langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} \quad (7.3)$$

où la relation de dispersion est donnée par

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (7.4)$$

On détermine le potentiel chimique comme d'habitude par l'équation donnant le nombre de particules

$$N = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} \quad (7.5)$$

Comment les particules peuvent-elles toutes être dans l'état $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ à température finie? Supposons d'abord que l'état fondamental est occupé de façon macroscopique par N_0 particules, où N_0 est d'ordre N . On a alors

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} \quad (7.6)$$

et il faut donc que μ soit très petit pour que le membre de droite soit grand. En développant le dénominateur, on trouve

$$\mu = -\frac{k_B T}{N_0}. \quad (7.7)$$

L'énergie du premier état excité dans un réseau cubique de côté L est

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2. \quad (7.8)$$

Donc, pour le premier niveau excité, en posant $N_0 = n_0 L^3$ où n_0 est la densité, on obtient,

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 + \frac{k_B T}{n_0 L^3}. \quad (7.9)$$

Dans la limite du volume infini, on voit donc (en trois dimensions... encore $d = 2$ ne fonctionne pas) qu'on peut négliger le dernier terme, i.e. mettre $\mu = 0$ pour déterminer l'occupation du premier niveau excité et de tous les autres. Leggett appelle les condensat de Bose Einstein ayant un seul état macroscopiquement occupé un condensat "simple". Autrement, si plus d'un niveau est occupé macroscopiquement, il est fragmenté.

Calculons donc l'occupation de ces niveaux autres que le fondamental lorsque la température est finie

$$N = N_0 + \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_{\mathbf{k}}} - 1} \quad (7.10)$$

Passant à la limite du continu, on a, avec $V = L^3$

$$\begin{aligned} N &= N_0 + V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_{\mathbf{k}}} - 1} \\ &= N_0 + V \frac{(4\pi)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 dk \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_{\mathbf{k}}} - 1} \end{aligned} \quad (7.11)$$

On peut changer de variable

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \\
d\varepsilon &= 2 \frac{\hbar^2 k}{2m} dk \\
\frac{(4\pi)^3}{(2\pi)^3} k^2 dk &= \frac{1}{2\pi^2} k \frac{m d\varepsilon}{\hbar^2} = \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}} \frac{m d\varepsilon}{\hbar^2} \\
&= \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon.
\end{aligned} \tag{7.12}$$

On écrit donc l'équation pour la densité $n = N/V$

$$n = n_0 + \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \tag{7.13}$$

$$= n_0 + \frac{(mk_B T)^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \int_0^\infty \frac{1}{e^x - 1} x^{1/2} dx \tag{7.14}$$

Pour évaluer l'intégrale, on procède comme suit

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{e^x - 1} x^{1/2} dx &= \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} x^{1/2} dx \\
&= \int_0^\infty e^{-x} \sum_{p=0}^\infty (e^{-x})^p x^{1/2} dx \\
&= \sum_{p=1}^\infty \frac{1}{p^{3/2}} \int_0^\infty e^{-y} y^{1/2} dy \\
&= \sum_{p=1}^\infty \frac{1}{p^{3/2}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) \\
&= \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 2.612 \frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned} \tag{7.15}$$

où ζ est la fonction zeta de Riemann et nous avons utilisé

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-y} y^{t-1} dy \tag{7.16}$$

et $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$. Substituant dans l'expression pour la densité, nous obtenons

$$n = n_0 + \frac{(mk_B T)^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{7.17}$$

$$= n_0 + \left(\frac{mk_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \tag{7.18}$$

La fraction des particules condensées est donc donnée par

$$\frac{n_0}{n} = 1 - \frac{1}{n} \left(\frac{mk_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \tag{7.19}$$

où nous avons défini la température T_c comme celle où le membre de droite s'annule, soit

$$T_c = \frac{2\pi \hbar^2}{k_B m} \left(\frac{n}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \right)^{2/3}. \tag{7.20}$$

Pour des températures plus grandes que cette valeur, $n_0 = 0$ et le potentiel chimique est négatif. Ce résultat correspond bien au résultat Éq.(7.1) trouvé physiquement en début de section.

En $d = 2$, la densité d'états est constante, donc l'intégrale à évaluer serait $\int_0^\infty \frac{1}{e^x - 1} dx$ plutôt que $\int_0^\infty \frac{1}{e^x - 1} x^{1/2} dx$. En deux dimensions donc, l'intégrale diverge et donc on a pas de condensation de Bose-Einstein à température finie. C'est l'analogie du théorème de Mermin-Wagner.

7.2.2 Stabilité de la condensation de Bose-Einstein sous l'effet des interactions

La condensation de Bose-Einstein survit-elle aux interactions? En seconde quantification, l'opérateur servant à trouver l'énergie d'interaction s'écrit,

$$\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi^\dagger(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}) \quad (7.21)$$

où, dans une base d'états propres normalisés au volume du système V , on a

$$\psi^\dagger(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\sqrt{V}} a_{\mathbf{k}}^\dagger. \quad (7.22)$$

Prenons le cas simple où $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, ce qui est une excellente approximation pour les atomes froids. Nous allons montrer que les interactions stabilisent le condensat, i.e. que si on a deux condensats dans le système, l'énergie potentielle sera beaucoup plus élevée. Les interactions dépeuplent le condensat, i.e. enlèvent des atomes de l'état $\mathbf{k} = 0$, mais de façon incohérente, i.e. elles ne favorisent pas l'existence de deux condensats.

Nous allons prouver ceci en faisant un calcul perturbatif à l'ordre dominant qui démontrera que de mettre N particules dans l'état $\mathbf{k} = 0$ donne une énergie beaucoup plus basse que de mettre $N/2$ particules dans l'état fondamental et $N/2$ dans l'état excité. Commençons par prendre comme fondamental l'état condensé Eq.(7.2). Utilisant $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$ ou simplement le fait au pour N bosons $a|N\rangle = \sqrt{N}|N-1\rangle$ on obtient

$$\psi(\mathbf{r})|\Omega_N\rangle = \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\sqrt{V}} a_{\mathbf{k}} |\Omega_N\rangle = \sqrt{\frac{N}{V}} |\Omega_{N-1}\rangle = \sqrt{n} |\Omega_{N-1}\rangle \quad (7.23)$$

où $|\Omega_{N-1}\rangle$ est le fondamental de Bose-Einstein pour $N-1$ particules. Il n'y a que l'état $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ qui contribue dans l'intégrale. On trouve donc, (négligeant encore 1 devant N).

$$\langle \Omega_N | \frac{g}{2} \int d^3\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) | \Omega_N \rangle = V \frac{g}{2} n^2. \quad (7.24)$$

Comme on se place dans la limite où N est très grand, nous allons approximer dorénavant l'énergie potentielle par

$$\langle \Omega_N | \frac{g}{2} \int d^3\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) | \Omega_N \rangle$$

Supposons maintenant que le système ait deux états macroscopiquement occupés qu'on peuple également. On a alors

$$|\Omega'_{N/2, N/2}\rangle = \frac{(a_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^\dagger)^{N/2}}{\sqrt{(N/2)!}} \frac{(a_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_1}^\dagger)^{N/2}}{\sqrt{(N/2)!}} |0\rangle$$

et

$$\begin{aligned}
\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\left|\Omega'_{N/2,N/2}\right\rangle &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\sqrt{V}} a_{\mathbf{k}}^\dagger \left(\sqrt{n/2} \left|\Omega'_{N/2-1,N/2}\right\rangle + e^{i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}} \sqrt{n/2} \left|\Omega'_{N/2,N/2-1}\right\rangle \right) \\
&= \left(\frac{n}{2} + \frac{n}{2} \right) \left|\Omega'_{N/2,N/2}\right\rangle \\
&\quad + \frac{n}{2} e^{-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}} \left|\Omega'_{N/2-1,N/2+1}\right\rangle + \frac{n}{2} e^{i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}} \left|\Omega'_{N/2+1,N/2-1}\right\rangle
\end{aligned} \tag{7.25}$$

Notez que le $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ peut créer d'autres états que ceux associés à $\mathbf{k} = 0$ ou \mathbf{k}_1 , mais que le coefficient numérique est 1 plutôt que \sqrt{N} , donc on est porté à les négliger. Évidemment il y a plusieurs valeurs de \mathbf{k} disponibles, ce qui veut dire qu'à la fin la contribution peut être importante. En pratique, ces termes contribuent à dépeupler le fondamental dans un calcul plus complet. Mais ils ne contribuent pas à créer deux condensats différents.

Continuons notre preuve. Multipliant par l'adjoint $\left\langle\Omega'_{N/2,N/2}\right|\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$ et utilisant l'orthogonalité des états, on a

$$\begin{aligned}
\left\langle\Omega_N\right|\frac{g}{2}\int d^3\mathbf{r}\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})\left|\Omega_N\right\rangle &= \frac{g}{2}Vn^2\left\langle\Omega'_{N/2,N/2}\right|\Omega'_{N/2,N/2}\right\rangle \\
&\quad + \frac{g}{2}V\left(\frac{n}{2}\right)^2\left\langle\Omega'_{N/2-1,N/2+1}\right|\Omega'_{N/2-1,N/2+1}\right\rangle \\
&\quad + \frac{g}{2}V\left(\frac{n}{2}\right)^2\left\langle\Omega'_{N/2+1,N/2-1}\right|\Omega'_{N/2+1,N/2-1}\right\rangle \\
&= \frac{g}{2}Vn^2\left(1 + \frac{1}{2}\right).
\end{aligned} \tag{7.26}$$

L'énergie est plus élevée par un facteur 3/2 que dans le cas à un seul condensat Éq.(7.24) et donc les interactions répulsives favorisent un seul état macroscopiquement occupé. Le raisonnement est plus compliqué dans le cas d'interactions attractives.

7.2.3 Ordre hors diagonal à longue portée et état cohérent

Dans un condensat de Bose Einstein, la matrice densité à une particule a la propriété suivante

$$\lim_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rightarrow\infty}\left\langle\Omega_N\right|\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}')\left|\Omega_N\right\rangle = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\mathbf{k}'}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'}\left\langle\Omega_N\right|a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}'}\left|\Omega_N\right\rangle = n_0. \tag{7.27}$$

Le contraste avec le cas habituel est frappant. Soit $n_{\mathbf{k}} = \left\langle\Omega_N\right|a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}\left|\Omega_N\right\rangle$. Alors, si cette quantité $n_{\mathbf{k}}$ a une certaine largeur dans l'espace de Fourier, elle aura l'inverse de cette largeur dans l'espace réel et donc,

$$\lim_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rightarrow\infty}\left\langle\Omega\right|\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}')\left|\Omega\right\rangle = \lim_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rightarrow\infty}\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r})}n_{\mathbf{k}} = 0 \tag{7.28}$$

Olivier Penrose a suggérer d'appeler cette propriété des états condensés ordre hors diagonal à longue portée.

Comme dans les cas de symétrie brisée que nous avons considérés antérieurement, la façon la plus commode de représenter l'ordre hors diagonal décrit par l'Eq.(7.27), est de choisir un état fondamental tel que $\left\langle\Omega_S\right|\psi(\mathbf{r}')\left|\Omega_S\right\rangle = \sqrt{n_0}e^{i\phi}$. Cette propriété est satisfaite par un état cohérent comme ceux discutés en début de chapitre.

7.2.4 Superfluidité, vitesse critique et interactions

Imaginons un condensat de Bose Einstein dans une géométrie toroïdale. Si on fait tourner le tore, les parois entreront en collision avec le fluide près des bords. Dans l'état superfluide, la condensat ne sera pas entraîné par la rotation des parois et il demeurera au repos. Landau suggéra l'argument suivant. Une particule de quantité de mouvement \mathbf{p} vu du point de vue des parois aura une quantité de mouvement $\mathbf{p} - m\mathbf{v}$ où \mathbf{v} est la vitesse des parois par rapport au système au repos. Comme la collision est élastique, la particule repartira avec une quantité de mouvement $\mathbf{p}' - m\mathbf{v}$ de même grandeur mais de direction différente. Cela ne sera donc possible que si $\mathbf{p}^2 - m\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{p}'^2 - m\mathbf{p}' \cdot \mathbf{v}$. Dans le cas d'une particule appartenant au condensat, $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ et il suffit donc de satisfaire $\mathbf{p}'^2 = m\mathbf{p}' \cdot \mathbf{v}$ ce qu'il est toujours possible de satisfaire en choisissant l'angle de diffusion de façon appropriée. Ainsi, un condensat de Bose-Einstein pour un système sans interactions n'est pas un superfluide.

La présence des interactions a l'effet dramatique suivant. Les états de basse énergie sont des modes collectifs obéissant à la relation

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} = c|\mathbf{p}|. \quad (7.29)$$

Ainsi, si la vitesse des parois $|\mathbf{v}|$ est plus petite que c , il est impossible de créer des excitations dans le système et c'est ce qui explique le fait que la partie superfluide du système n'est pas entraînée par les parois. Les excitations de basse énergie se calculent aisément dans le cas d'interactions faibles. Ce calcul est fait dans le livre de Annett section 5.6. Il suffit d'écrire $\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) + \delta\psi(\mathbf{r})$ où $\psi_0(\mathbf{r})$ est le condensat et de garder les termes quadratiques en $\delta\psi(\mathbf{r})$. Une transformation de Boboliubov analogue à celle fait pour l'antiferroaimant nous donne la solution. La vitesse est donnée par

$$c = \left(\frac{\hbar^2 n_0 g}{m} \right)^{1/2}. \quad (7.30)$$

Cela ne décrit pas toutes les excitations dans le cas de systèmes qui interagissent fortement comme ${}^4\text{He}$. Il y a aussi ce qu'on appelle des rotons.

Leggett⁴ explique aussi que les états superfluides peuvent être métastables, c'est-à-dire exister très longtemps même s'ils ne sont pas des états d'équilibre.

7.2.5 Pièges magnétiques et optiques pour les atomes froids et observation du phénomène

À la fin des années 30, il fut découvert que ${}^4\text{He}$ était un superfluide. Cet atome est un boson car il possède deux électrons, deux protons et deux neutrons, soit un nombre pair de particules. Lorsque les énergies sont suffisamment basses pour qu'il soit impossible de séparer les constituants, il n'est pas nécessaire d'écrire une fonction d'onde qui est antisymétrique sous échange de n'importe quelle paire de particules. Seuls deux atomes complets de ${}^4\text{He}$ pourront s'échanger et donc leur fonction d'onde ne changera pas de signe, ce sont des bosons.

En utilisant la densité $\rho \approx 145 \text{ kg/m}^3$ pour l' ${}^4\text{He}$, on trouve que la température de condensation est d'environ 3.11 K, ce qui est de l'ordre de grandeur de la température de 2.2 K à laquelle ce liquide devient superfluide. Le ${}^3\text{He}$ est un fermion qui devient superfluide à une température environ mille fois plus basse, bien que chimiquement il soit identique à l' ${}^4\text{He}$. La superfluidité dans ce cas vient

⁴A.J. Leggett, Quantum Liquids, Oxford Graduate Texts, (2006).

du phénomène de Cooper que nous discuterons dans le contexte de la supraconductivité. Cela démontre dramatiquement l'influence des statistiques quantiques.

Malheureusement, les atomes d' ^4He interagissent très fortement et il n'est pas facile de faire des prédictions théoriques. En 1995, le phénomène de condensation de Bose-Einstein d'un gaz très dilué interagissant très fortement a été observé pour la première fois avec des atomes de ^{87}Rb . Les densités de ces atomes dans des pièges sont de l'ordre de $10^{11} - 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ comparé à ^4He dont la densité est de $2 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$. De plus ils sont beaucoup plus lourds. Leur température de condensation de Bose-Einstein est estimée être de l'ordre de $10^{-8} - 10^{-6} \text{ K}$. Aussi incroyable que cela puisse paraître, ces températures peuvent être atteintes grâce à plusieurs trucs d'optique quantique. Nous n'en décrivons que quelques aspects et de façon très schématique.

On utilise généralement les alcalins parce que leur électron de valence solitaire forme de grandes orbites qui sont plus facilement polarisables et donc interagissent plus fortement avec la lumière. Ces atomes seront des bosons s'ils ont un nombre impair de nucléons. Par exemple, ^7Li , ^{23}Na , ^{87}Rb ont tous un spin nucléaire $I = 3/2$. Comme $S = 1/2$, leur spin total F peut donc prendre les valeurs $F = 2$ et $F = 1$. Une des techniques pour piéger ces atomes est d'utiliser un champ magnétique. Cela semble à priori bizarre parce que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ implique qu'il ne peut y avoir de maximum du champ magnétique (Théorème de Earnshaw). Ce théorème n'élimine pas la possibilité d'avoir un minimum. Pour comprendre comment il est néanmoins possible de faire un piège optique pour ces atomes, étudions un peu plus en détail leurs états de spin et comment ils réagissent au champ magnétique. Tout d'abord, rappelons qu'en présence de l'interaction hyperfine, le moment cinétique total est un bon nombre quantique. Il est important d'identifier la partie spin et la partie noyau de l'état car le champ magnétique se couple principalement à la partie spin. Pour écrire explicitement les états de moment cinétique total F , on part de l'état complètement polarisé

$$|F = 2, M_F = 2\rangle = \left| M_I = \frac{3}{2}, M_S = \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{3}{2} \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} \right\rangle \quad (7.31)$$

et on applique l'opérateur d'échelle

$$\hat{F}^- = \hat{I}^- + \hat{S}^- \quad (7.32)$$

où

$$\hat{S}^- |m\rangle = \sqrt{S(S+1) - m(m-1)} |m-1\rangle. \quad (7.33)$$

On obtient, en s'assurant en plus que les états sont normalisés,

$$\begin{aligned} |F = 2, M_F = 2\rangle &= \left| \frac{3}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \right\rangle \\ |F = 2, M_F = 1\rangle &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} \left| \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{3}{2} \right\rangle \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \right) \\ |F = 2, M_F = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2} \right\rangle \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \right) \\ |F = 2, M_F = -1\rangle &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \left| -\frac{1}{2} \right\rangle + \left| -\frac{3}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \right\rangle \right) \\ |F = 2, M_F = -2\rangle &= \left| -\frac{3}{2} \right\rangle \left| -\frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Comme les trois états avec $F = 1$ doivent être orthogonaux, on peut facilement

les écrire à partir des résultats précédents

$$\begin{aligned}
|F = 1, M_F = 1\rangle &= \frac{1}{2} \left(\left| \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{3} \left| \frac{3}{2} \right\rangle \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \right) \\
|F = 1, M_F = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(- \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2} \right\rangle \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \right) \\
|F = 1, M_F = -1\rangle &= \frac{1}{2} \left(\left| -\frac{1}{2} \right\rangle \left| -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{3} \left| -\frac{3}{2} \right\rangle \left| \frac{1}{2} \right\rangle \right)
\end{aligned}$$

Nous venons en fait de trouver les coefficients de Clebsh-Gordon pour combiner les moments cinétiques 3/2 et 1/2.

En présence d'un champ magnétique, le terme de Zeeman peut s'écrire en très bonne approximation comme $2\mu_B \hat{S}_z B_z$ pour un champ magnétique selon z car le moment magnétique du noyau est environ 2000 fois plus petit que celui de l'électron. Évaluant $\langle F, M_F | 2\mu_B \hat{S}_z B_z | F, M_F \rangle$, on trouve facilement que les deux niveaux $M_F = 0$ sont in affectés alors que pour $F = 2$, les niveaux $M_F > 0$ augmentent en énergie et $M_F < 0$ diminuent, le changement étant d'autant plus marqué que la projection est grande. Pour $F = 1$, les rôles de $M_F > 0$ et $M_F < 0$ sont inversés. Cela veut dire que dans un champ magnétique dont la grandeur est minimale à un endroit donné, les atomes de moment cinétique total $F = 2$ sont attirés vers le minimum si $M_F > 0$. Cela leur permet d'abaisser leur énergie. Il en est de même pour les atomes ayant $F = 1$ et $M_F < 0$. Chaque valeur de F mène à un gaz de bosons discernable du gaz ayant un F différent. C'est comme si on avait deux gaz en équilibre. Pour abaisser la température, il suffit d'abaisser la profondeur du piège à atome pour laisser sortir les atomes les plus chauds. On peut ainsi atteindre le micro-Kelvin.

Pourquoi les atomes ne forment-ils pas un solide, ce qui est après tout leur vrai état fondamental. C'est parce qu'ils sont très dilués et que les collisions à deux corps ne peuvent être qu'élastiques, ce qui empêche un lien de se former entre deux atomes. Les collisions à trois corps le permettent mais elles sont négligeables (pas complètement cependant puisqu'elles permettent l'équilibre thermique). À cause de ces collisions le gaz a un temps de vie fini, mais pendant les quelques secondes qu'il dure, plusieurs expériences sont possibles.

Une autre façon de refroidir les atomes fait appel aux lasers. On place des lasers le long des axes d'un repère en $d = 3$ avec une fréquence légèrement inférieure à la fréquence d'une transition entre deux niveaux hyperfins. Si les atomes se déplacent vers les laser, l'effet Doppler les fait entrer en résonance. Ils absorbent un photon, ce qui les ralentit. De plus, ces lasers peuvent servir de piège optique. En les focalisant dans une région déterminée mais avec une fréquence légèrement inférieure à celle d'une transition, la grande polarisabilité α positive ajoute une énergie potentielle $-\alpha E^2/2$ (de forme spatiale harmonique) qui fait que les atomes ont tendance à se tenir dans les régions de fort champ électrique.

En 1995, le phénomène de condensation de Bose-Einstein a été observé par trois groupes différents utilisant chacun un type d'ion différent, 7Li , ${}^{23}Na$, ${}^{87}Rb$. On observe ce phénomène en enlevant subitement le piège optique et en mesurant optiquement la densité du nuage d'atomes qui s'échappe. Cela donne une mesure directe de leur distribution de vitesse. C'est ce qui est illustré sur la page internet du cours. À suffisamment basse température, la largeur du pic observé se concentre autour d'une vitesse nulle (elle n'est pas complètement nulle à cause du principe d'incertitude et du fait que le piège a une taille finie). À température plus élevée, la largeur est celle qu'on peut calculer à partir d'une distribution thermique. Le prix Nobel de 2001 a été attribué à Cornell, Ketterle et Wieman pour cet exploit. On a pu observer la superfluidité et des vortex, en d'autres mots, l'effet des interactions nécessaire à l'observation de ces phénomènes (tel qu'expliqué dans la section précédente) est présent.

On peut aussi créer un réseau pour les atomes en se servant du patron d'interférence des lasers qui servent à les piéger. Ils peuvent servir de systèmes modèles pour la physique du solide. Les énergies sont telles que les atomes se comportent comme s'ils étaient décrits par un modèle de Hubbard. Un problème sur ce sujet apparaît dans le devoir 4. Un des grands objectifs de ce domaine est de trouver des conditions où il sera possible de modéliser les supraconducteurs à haute température.

Plusieurs résultats spectaculaires ont été obtenus ces dernières années. Par exemple,

- un phénomène dynamique intéressant où le système oscille entre un isolant de Mott et un condensat de Bose-Einstein

Greiner M, Mandel O, Hansch TW, et al.

Collapse and revival of the matter wave field of a Bose-Einstein condensate
NATURE 419 (6902): 51-54 SEP 5 2002

- La transition superfluide isolant de Mott, traitée dans le devoir 5

Greiner M, Mandel O, Esslinger T, et al.

Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms

NATURE 415 (6867): 39-44 JAN 3 2002

- Un système équivalent à un modèle de bosons de coeur dur en une dimension

Paredes B, Widera A, Murg V, et al.

Tonks-Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice
NATURE 429 (6989): 277-281 MAY 20 2004

- La formation de paires de Cooper

Koponen T, Kinnunen J, Martikainen JP, et al.

Fermion pairing with spin-density imbalance in an optical lattice
NEW JOURNAL OF PHYSICS 8: Art. No. 179 SEP 5 2006

7.2.6 Équation de Gross-Pitaevskii

Supposons un potentiel de piégeage $V_{opt}(\mathbf{r})$ et des interactions entre atomes du type $g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Étant donné que la longueur d'onde de la lumière, qui détermine le pas du réseau optique, est beaucoup plus grande que la taille des atomes, cette approximation en fonction delta est justifiée. Dans l'approximation de diffusion d'onde s , on a

$$g = \frac{4\pi a_s \hbar^2}{m} \quad (7.35)$$

où a_s s'appelle la longueur de diffusion. Cette longueur peut être manipulée par le champ magnétique externe qui mélange des niveaux hyperfins. Lorsqu'on est près de ce qui s'appelle une résonance de Feshbach, a_s peut varier de positif à négatif en passant par $\pm\infty$ (en principe).

Pour trouver la densité d'atomes dans le cas inhomogène, une approche utile est d'utiliser l'approximation de Hartree, ce qui donne pour la fonction d'onde

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{opt}(\mathbf{r}) + gn(\mathbf{r}) \right) \psi_i(\mathbf{r}) = \varepsilon_i \psi_i(\mathbf{r}) \quad (7.36)$$

où

$$n(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1} |\psi_i(\mathbf{r})|^2. \quad (7.37)$$

Comme d'habitude le potentiel chimique se trouve en exigeant qu'on retrouve le nombre total de particules $N = \int n(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$. Lorsque toutes les particules sont dans l'état fondamental, $n(\mathbf{r}) = |\psi_0(\mathbf{r})|^2$, on a un condensat de Bose-Einstein.

L'équation de Schrödinger non-linéaire obtenue ci-dessus s'appelle l'équation de Gross-Pitaevskii. Son analogue mieux connu dans le cas des supraconducteurs est l'équation de Ginzburg-Landau. Tout ceci nous est familier depuis la théorie de champ moyen. La fonction d'onde joue ici le rôle de paramètre d'ordre.