Groupe

- Si $a \in G$, $b \in G$ $\quad ab \in G$
- $\exists\, e,\ ae = ea = a$
- $\forall\, a,\ \exists\, a^{-1},\ a^{-1}a = aa^{-1} = e$
- $(ab)c = a(bc)$

Représentations (3.3)

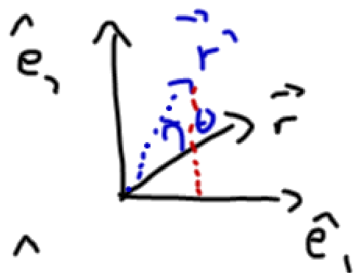
Module = vecteurs

a (vecteur)

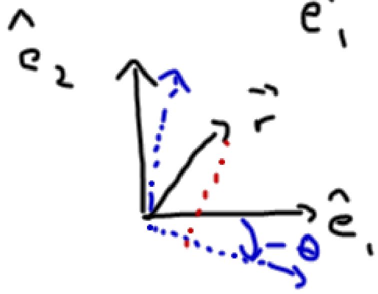
$\mathcal{R}(a)\,(\text{vecteur}) = (\text{vecteur})'$

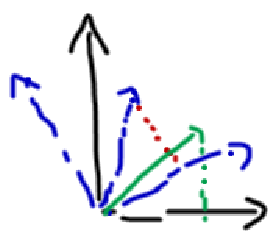
$\mathcal{R}(a)\,\mathcal{R}(b) = \mathcal{R}(ab)$

Rappel sur rotations.



$$\vec{r}'(\theta)\cdot\hat{e}_i = \vec{r}\cdot\hat{e}_i'(-\theta)$$





$$\vec{r}'(\theta)\cdot\hat{e}_i'(\theta)$$

$$= \vec{r}\cdot\hat{e}_i$$

févr. 1-08:44

R pour x, y =

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{R^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R^{-1}}$$

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$R^T(\hat{z},0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^T(\hat{z},\tfrac{2\pi}{3}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

$$R^T(\hat{z},\tfrac{4\pi}{3}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

$$R^T(\hat{y},\pi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{bmatrix}$$

?

$$R^T(\hat{l},\pi) = R^T(\hat{y},\pi)\,R^T(\hat{z},\tfrac{2\pi}{3})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{bmatrix}$$

$$R^T(\hat{m},\pi) = ?$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} z \end{bmatrix}$$

$$V = V_1 \oplus V_2$$ Somme directe.

$$R^T_{\text{Base quelconque}} = S^{-1} R S$$

Loi de transformation des fonctions

$$\boxed{\varphi_1 = \underline{2x}z \qquad \varphi_2 = \underline{2y}z \qquad \varphi_3 = z}$$

$$\varphi'(x'_i) = \varphi(x_i)$$

$$\varphi'(R_{ij}x_j) = \varphi(x_i)$$

$$\varphi'(x_i) = \varphi(R^T_{ij}x_j)$$

Quel est $R(\hat{z}, \frac{2\pi}{3})$ générées par le module

$$x \to -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$$

$$y \to -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y$$

$$z \to z$$

$$\varphi_1' = 2\left[-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right]z$$

$$= -\frac{1}{2}(2xz) + \frac{\sqrt{3}}{2}(2yz)$$

$$= -\frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\varphi_2$$

$$\varphi_2' = 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right]z$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}(2xz) - \frac{1}{2}(2yz)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\varphi_1 - \frac{1}{2}\varphi_2$$

$$\varphi_3' = \varphi_3$$

Lemme de Schur

ⓐ Si $[H, \mathcal{R}(a)] = 0$

$\forall \mathcal{R}(a) \Rightarrow H = cte\, I$

si $\mathcal{R}(a)$ est irréductible

ⓑ Si $[H, \mathcal{R}(a)] = 0$

$\forall \mathcal{R}(a)$ d'une rep. réductible

alors

$$H = \begin{bmatrix} \boxed{c_1 I} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \boxed{c_2 I} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & c_3 I & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

identité dans chacun des

sous-module

Symétrie est liée à la

dégénérescence des

états d'énergie propre

"Théorème célèbre"

$$\sum_{i=1}^{n} l_i^2 = h$$

où h = ordre du groupe

l_i = dimension de la représentation irréductible i

n = # de repr. irr.

Groupe abélien

$$0 = [R(a), R(b)] \quad \forall\, b \in G$$

$$n = h \qquad \sum_{i=1}^{h} l_i^2 = h$$

e.g. groupe des translations $\quad l_i = 1$

$$T(a) = e^{ika}$$

$$T(a)T(b) = e^{ik(a+b)}$$

$$= e^{ika}\, e^{ikb}$$

. . . .

Déf. : caractères d'une représentation

	E	A	B	C	D	F
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1	1	1	1
$\Gamma^{(2)}$	1	-1	-1	-1	1	1
$\Gamma^{(3)}$	2	0	0	0	-1	-1

Classe Classe

\# Classe
= # repr. irréductibles

$$XAX^{-1} = A \text{ ou } B \text{ ou } C$$

$$\uparrow$$
$$\exists G$$

$\chi^{(j)}(R)$ = Trace de matrice R dans repr. j

$$\sum_{R=1}^{h} \chi^{(i)*}(R)\,\chi^{(j)}(R) = h\,\delta_{ij}$$

Repr. <u>réductible</u>

$$\chi(R) = \sum_j a_j\,\chi^{(j)}(R)$$

$$a_j = \frac{1}{h}\sum_R \chi^j(R)^*\,\chi(R)$$

Remarque :

En M.Q. représentations sont "projectives" plutôt que vectorielles

$$\mathcal{D}(a)\,\mathcal{D}(b) = \mathcal{E}(a,b)\,\mathcal{D}(ab)$$

"phase"

3.4 Groupes et algèbres de Lie

Élément du groupe de rotation continu

$$\mathcal{R}(\theta,\hat{n}) = e^{-i\vec{J}\cdot\hat{n}\,\theta/\hbar}$$

$\vec{J}$ ≡ générateurs du groupe de Lie

$$\boxed{[J_a, J_b] = i\hbar\,\epsilon_{abc} J_c}$$

Algèbre de Lie

Constantes de structure du groupe

Dimension du groupe de Lie
= # de générateurs du groupe

Représentation d'ordre n d'une algèbre de Lie,
= ensemble des mat. $n \times n$ qui ont les mêmes $[\;,\;]$ que les générateurs

Exemple

Soit moment cinétique j

$|j\, m\rangle$ $(2j+1)$ états

Représentation des générateurs :

$$\langle j\, m | J_3 | j\, m' \rangle$$

$$\langle j\, m | J_2 | j\, m' \rangle$$

$$\langle j\, m | J_1 | j\, m' \rangle$$

$J_+ = J_1 + i J_2$

Algèbre de Lie $[J_a, J_b] = i\hbar \epsilon_{abc} J_c$

$\boxed{\begin{array}{c} SO(3) \\ SU(2) \end{array}}$ $\begin{array}{l} \longrightarrow j: 0, 1, 2 \ldots \\ \longrightarrow j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \ldots \end{array}$

$SU(2)$ = matrices unitaires d'ordre 2, $\det = 1$

$$U = e^{iK} \approx 1 + iK$$

$$\det U = 1 = (1 + i\lambda_1)(1 + i\lambda_2)$$

$$\sim 1 + i(\lambda_1 + \lambda_2) + \mathcal{O} \ldots$$

$$\sim 1 + i \,\mathrm{Tr}\, K$$

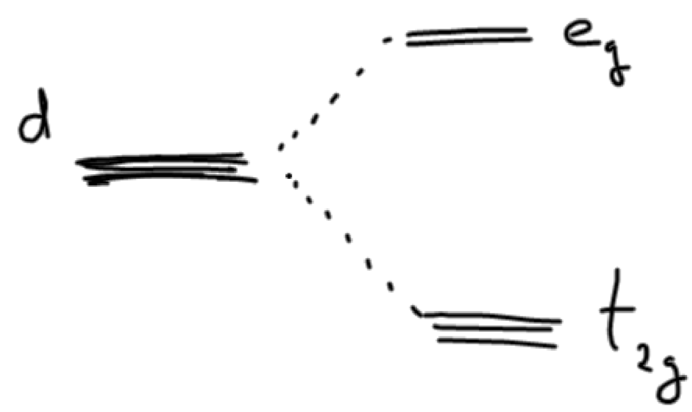
$\mathrm{Tr}\, K = 0$ Pauli

$$\mathcal{R}(\hat{n}, \theta) = e^{i \vec{S} \cdot \hat{n} / \hbar \, \theta}$$

$$= e^{i \vec{\sigma} \cdot n \frac{\theta}{2}}$$

$$= I \cos\frac{\theta}{2} + i(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin\frac{\theta}{2}$$

févr. 1-10:12


d
eg
t2g