Effets Josephson généralisés entre antiferroaimants et entre supraconducteurs antiferromagnétiques

par

Dominique Chassé

Thèse présentée au département de physique
en vue de l'obtention du grade de docteur ès science (Ph.D.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, 17 août 2009

Composition du jury

Le ____________________________, le jury a accepté le mémoire de M. Chassé dans sa version finale.

Prof. David Sénéchal
Département de physique
Président-rapporteur

Prof. André-Marie Tremblay
Département de physique
Directeur de recherche

Prof. Louis Taillefer
Département de physique

Gennady Chitov
Université Laurentienne
Examinateur externe

Sommaire

L'effet Josephson est généralement présenté comme le résultat de l'effet tunnel cohérent de paires de Cooper à travers une jonction tunnel entre deux supraconducteurs, mais il est possible de l'expliquer dans un contexte plus général. Par exemple, Esposito & al. ont récemment démontré que l'effet Josephson DC peut être décrit à l'aide du boson pseudo-Goldstone de deux systèmes couplés brisant chacun la symétrie abélienne $U(1)$. Puisque cette description se généralise de façon naturelle à des brisures de symétries continues non-abéliennes, l'équivalent de l'effet Josephson devrait donc exister pour des types d'ordre à longue portée différents de la supraconductivité.

Le cas de deux ferroaimants itinérants (brisure de symétrie $O(3)$) couplés à travers une jonction tunnel a déjà été traité dans la littérature. Afin de mettre en évidence la généralité du phénomène et dans le but de faire des prédictions à partir d'un modèle réaliste, nous étudions le cas d'une jonction tunnel entre deux antiferroaimants itinérants. En adoptant une approche similaire à celle d'Ambegaokar & Baratoff pour une jonction Josephson, nous trouvons un courant d'aimantation alternée à travers la jonction qui est proportionnel à $\hat{\mathbf{s}}_G \times \hat{\mathbf{s}}_D$ où $\hat{\mathbf{s}}_G$ et $\hat{\mathbf{s}}_D$ sont les vecteurs de Néel de part et d'autre de la jonction. La fonction sinus caractéristique du courant Josephson standard est donc remplacée ici par un produit vectoriel. Nous montrons que, d'un point de vue microscopique, ce phénomène résulte de l'effet tunnel cohérent de paires particule-trou de spin 1 et de vecteur d'onde net égal au vecteur d'onde antiferromagnétique $\mathbf{Q}$. Nous trouvons également la dépendance en température de l'analogue du courant critique. En présence d'un champ magnétique externe, nous obtenons l'analogue de l'effet Josephson AC et la

description complète que nous en donnons s'applique aussi au cas d'une jonction tunnel entre ferroaimants (dans ce dernier cas, les traitements antérieurs de cet effet AC s'avèrent incomplets).

Nous considérons ensuite le cas d'une jonction tunnel entre deux matériaux au sein desquels l'antiferromagnétisme itinérant et la supraconductivité de type d coexistent de façon homogène. Nous obtenons à nouveau un courant d'aimantation alternée proportionnel à $\hat{\mathbf{s}}_G \times \hat{\mathbf{s}}_D$, mais l'amplitude de l'analogue du courant critique est modulée par l'énergie Josephson de la jonction $E_J \propto \cos\Delta\varphi$, où $\Delta\varphi$ est la différence de phase entre les deux paramètres d'ordre supraconducteurs. Symétriquement, le courant Josephson supraconducteur est proportionnel à $\sin\Delta\varphi$, mais le courant critique est modulé par l'énergie de couplage entre les moments magnétiques alternés $E_S \propto \mathbf{S}_G \cdot \mathbf{S}_D$.

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier mon directeur de recherche, le professeur André-Marie Tremblay, pour son soutien intellectuel constant. Je tiens également à remercier mes collègues de bureau Dominic Bergeron, Charles Brillon, Syed Hassan, Giovanni Sordi et Jules Lambert pour avoir alimenté mes réflexions et pour leur agréable compagnie.

Évidemment, je remercie toute ma famille et plus spécialement mes parents. Finalement, ce travail n'aurait pu être accompli sans le support moral de ma conjointe Caroline.

Table des matières

Table des figures

Introduction

La question de l'*effet Josephson de spin* se situe à la confluence de deux thèmes de recherche : d'une part, l'étude des courants de spin dans les hétérostructures magnétiques et, d'autre part, la généralisation de l'effet Josephson à des brisures spontanées de symétries non-abéliennes. Alors que le premier de ces thèmes s'inscrit dans le contexte éminemment actuel de la spintronique, le second participe de cette démarche, inhérente à la science, qui consiste à procéder du particulier au général.

Le contexte de la spintronique

Les phénomènes de transport reliés au spin dans les microstructures magnétiques ont suscité un intérêt considérable en recherche ces dernières années. Ceci est dû principalement à l'émergence de la *spintronique*, aussi appelée *magnétoélectronique*, qui offre des perspectives d'applications technologiques nouvelles exploitant simultanément les degrés de liberté de spin et de charge de l'électron [1, 2, 3]. Les exemples les plus connus à ce jour de telles applications sont sans doute les têtes de lecture GMR (Giant Magneto-Resistance) des disques durs modernes ainsi que les mémoires magnétiques non volatiles (ou MRAM), dont le principe repose sur le phénomène de la *magnétorésistance géante*[1] dans les multicouches métalliques magnétiques [4, 5].

[1]Le phénomène de la magnétorésistance géante découle essentiellement du fait que le taux de diffusion des électrons (et donc la résistance électrique) à l'interface d'un système de deux couches ferromagnétiques adjacentes est considérablement plus élevé lorsque leur moments magnétiques sont anti-alignés que lorsqu'ils sont alignés.

Une part importante des recherches actuelles en spintronique vise à introduire des effets dépendants du spin dans les composants électroniques standards à base de semi-conducteurs. Ceci permettrait d'augmenter substantiellement leur performance en plus de générer des fonctionnalités inédites. Les avantages de ces nouveaux composants seraient nombreux : non-volatilité, augmentation de la vitesse dans le traitement des données, réduction de la consommation en puissance électrique, augmentation de la densité d'intégration des circuits, etc.

Une étape essentielle dans l'atteinte de cet objectif est de parvenir à réaliser l'injection efficace de courants électriques fortement polarisés en spin dans le médium semi-conducteur (non-polarisé). À cette fin, une des techniques ayant été envisagées est l'*injection ohmique*, dont l'approche la plus directe consiste à former un contact ohmique entre un métal ferromagnétique (FM) et le semi-conducteur. L'injection ohmique s'appuie sur le fait que dans un métal ferromagnétique, les conductivités électriques associées aux populations de spins majoritaire ($\uparrow$) et minoritaire ($\downarrow$) diffèrent considérablement, de sorte qu'un courant électrique qui le traverse est nécessairement polarisé en spin. Cependant, les mesures expérimentales du taux d'injection au moyen de cette technique ont mené à des valeurs extrêmement basses, ce qui s'explique par le fait que la conductivité des métaux ferromagnétiques est beaucoup plus élevée que celle des semi-conducteurs [6, 7, 8].

Comme alternative au problème d'injection de spin, le concept de "courant de spin pur" (*pure spin current*) a suscité un intérêt particulier ces dernières années. Un courant de spin pur (CSP) consiste en la superposition de deux courants d'électrons de polarisations opposées circulant dans des directions contraires, de sorte que le courant de charge net est nul. Différentes méthodes ont été proposées afin de générer un CSP. Par exemple, des concepts de "batteries de spin" (*spin-battery*) ont été développés dans lesquels la force "spin-motrice" à l'origine du CSP est produite par un champ magnétique externe alternatif ou inhomogène [9, 10]. Expérimentalement, Sharma & al. ont démontré qu'il est possible de générer un CSP en modulant la géométrie d'un point quantique dans un 2DEG avec interaction spin-orbite [11]. Par ailleurs, Stevens & al. et Hubner & al. ont réussi indépendamment à produire un CSP dans les semiconducteurs ZnSe et GaAs. Leur méthode consistait à exploiter l'interférence quantique entre les processus d'absorption associés à deux pulses lasers femtosecondes de fréquences ω et 2ω et de polarisations linéaires mutuellement orthogonales [12, 13, 14]. Le transport de CSP par les magnons a également été étudié par plusieurs groupes [15, 16, 17, 18, 19].

Les courants de spin non-dissipatifs ont suscité, eux aussi, beaucoup d'intérêt. Par exemple, l'effet Hall de spin intrinsèque, découvert récemment par Murakami & al. dans les semi-conducteurs de type P [49] et par Sinova & al. dans les 2DEG [21], est un courant de spin non-dissipatif qui apparaît en réponse à un champ électrique transverse. Dans un 2DEG, cet effet est intimement lié à l'interaction spin-orbite de type Rashba (ISOR).

En fait, il est intéressant de noter que, même à l'équilibre thermodynamique, c'est-à-dire en l'absence de champs externes, des courants de spin non-dissipatifs sont présents dans l'état fondamental d'un système avec ISOR [22]. Similairement, des courants de spin pur à l'équilibre themodynamique (CSE) existent dans les systèmes présentant un ordre magnétique non-colinéaire [23]. Par exemple, König & al. ont mis en évidence l'existence théorique d'un CSE dans une couche mince d'un métal ferromagnétique présentant un ordre magnétique spiral [24].

C'est précisément dans ce contexte que s'inscrivent les travaux présentés dans cette thèse. En effet, différentes études ont démontré théoriquement qu'un CSE doit circuler spontanément à travers l'interface d'une jonction tunnel ferromagnétique (FM/I/FM) lorsque les moments magnétiques de part et d'autre de la jonction sont non-colinéaires [25, 26, 27]. Lee & al. [25] et Nogueira & al. [26] réfèrent à ce phénomène en employant l'expression de *supercourant de spin* par analogie avec l'effet Josephson dans les jonctions supraconductrices. Pour notre part, nous y réfèrerons explicitement en tant qu'*effet Josephson de spin*.

Une généralisation de l'effet Josephson

Une des manifestations les plus spectaculaires de la supraconductivité est sans aucun doute l'effet Josephson [28]. Celui-ci consiste en l'apparition d'un courant non-dissipatif (ou *supercourant*) entre deux matériaux supraconducteurs séparés par une mince couche isolante et ce, même en l'absence d'une différence de potentiel. Bien que les paires de Cooper ne puissent exister au sein d'un matériau non-supraconducteur, si la couche qui sépare les deux supraconducteurs est suffisamment mince, elles peuvent néanmoins la traverser par effet tunnel tout en conservant leur cohérence de phase. C'est la persistance de cette cohérence de phase qui donne lieu à l'effet Josephson et qui explique, notamment, son caractère non-dissipatif. Le courant qui en résulte est proportionnel à $\sin \Delta\varphi$, où $\Delta\varphi$ est la différence de phase entre les deux paramètres d'ordre supraconducteurs. En présence d'une différence de potentiel constante à travers la jonction, l'invariance de jauge requiert que la différence de phase augmente linéairement dans le temps, ce qui entraîne un courant alternatif dont la fréquence ne dépend que de constantes physiques universelles.

La supraconductivité ne constitue toutefois qu'un exemple parmi d'autres de brisure spontanée de symétrie et de cohérence quantique macroscopique. Le paramètre d'ordre est un nombre complexe et donc, la symétrie brisée est $U(1)$. Ainsi, l'état supraconducteur sélectionne une phase et l'effet Josephson peut s'interpréter comme le résultat de la tendance du système à vouloir uniformiser la phase à travers la jonction tunnel.

Puisqu'il existe de nombreux autres types d'ordres à longue portée et de brisures spontanées de symétrie correspondantes, la question d'un analogue de l'effet Josephson dans de tels cas se pose naturellement [29]. Il semble en effet raisonnable de s'attendre à ce qu'une différence dans la valeur d'un paramètre d'ordre à travers une jonction entraîne l'effet tunnel cohérent des "objets" condensés qui existent dans l'état à symétrie brisée. Cette question s'avère particulièrement pertinente dans le contexte où les jonctions entre matériaux magnétiques occupent une place prépondérante en spintronique. En fait, nous avons déjà mentionné que des prédictions théoriques ont été faites récemment concernant l'existence possible de courants de spin de type Josephson dans les jonctions tunnel ferromagnétiques [25, 26, 27]. Le ferromagnétisme est la réalisation d'une brisure spontanée de la symétrie $SO(3)$ de rotation des spins et un courant de spin découlerait du couplage d'échange qui favorise l'alignement des moments magnétiques de part et d'autre de la jonction. D'un point de vue à la Ginzburg-Landau, la fonctionnelle d'énergie libre contient un terme proportionnel à $\mathbf{M}_G \cdot \mathbf{M}_D$, où $\mathbf{M}_{G(D)}$ dénote le moment magnétique à gauche (droite) de la jonction. Les équations d'Heisenberg impliquent alors que $\frac{d\mathbf{M}_G}{dt} \sim \mathbf{M}_G \times \mathbf{M}_D$, ce que l'on peut interpréter comme un courant de spin.

Effet Josephson de spin dans les jonctions tunnel antiferromagnétiques AF/I/AF

L'intérêt d'étudier l'effet Josephson de spin dans les jonctions tunnel antiferromagnétiques est multiple. Dans le contexte de la spintronique, il a été démontré expérimentalement que l'absence de moment magnétique net dans les antiferroaimants résulte en une dynamique de spin plus rapide que dans les ferroaimants et ce, par plusieurs ordres de grandeur. Cette propriété pourrait donc contribuer à augmenter le nombre, jusqu'à présent limité, d'applications des matériaux antiferromagnétiques [30].

Plus généralement, dans les antiferromaimants, le paramètre d'ordre de Néel brise simultanément la symétrie SO(3) sous rotation des spins et la symétrie sous translation par un vecteur du réseau direct. Ceci a pour conséquence, nous le verrons, d'en rendre le traitement mathématique moins évident. De plus, l'antiferromagnétisme se trouve souvent au voisinage de la supraconductivité dans les diagrammes de phases de nombreux matériaux tels que les fermions lourds, les supraconducteurs à haute température critique ainsi que les supraconducteurs organiques lamellaires. Parvenir à une compréhension des phénomènes de type Josephson dans les antiferroaimants constitue une première étape vers une étude plus générale à partir de modèles dans lesquels les paramètres d'ordre antiferromagnétique et supraconducteur coexistent. Il n'est pas exclu que l'effet Josephson généralisé puisse même contribuer à la détection expérimentale d'une coexistence homogène de ces deux paramètres d'ordre dans certains matériaux. De récentes recherches ont d'ailleurs été menées dans une perspective similaire dans le cas où supraconductivité et ferromagnétisme coexistent [31].

Contenu de la thèse

Dans la première partie de la thèse, nous considérons un modèle microscopique d'une jonction tunnel entre deux antiferroaimants itinérants[2]. Nous formulons l'hamiltonien total du système comme la somme de l'hamiltonien de chacun des antiferroaimants et d'un hamiltonien tunnel décrivant le transfert d'électrons à travers la jonction. Nous motivons et décrivons de façon détaillée l'hamiltonien champ moyen ODS (*onde de densité de spin*) que nous utilisons afin de modéliser l'antiferromagnétisme itinérant. Nous montrons ensuite comment incorporer d'emblée dans l'hamiltonien tunnel la non-colinéarité possible des moments magnétiques alternés de chaque AF au moyen de transformations unitaires.

Dans la seconde partie, nous dérivons l'expression pour le courant Josephson de spin à travers la jonction tunnel. Un calcul en réponse linéaire nous montre que la fonction sinus de l'effet Josephson standard est remplacée par le produit vectoriel $\mathbf{S}_G \times \mathbf{S}_D$ des moments magnétiques alternés de part et d'autre de la jonction. Il nous fournit également une expression explicite pour l'analogue du courant critique et de sa dépendance en température. De plus, nous montrons que (a) l'effet tunnel cohérent de paires de Cooper est remplacé par l'effet tunnel de paires particule-trou de spin 1 et que (b) l'influence d'un champ magnétique externe introduit une dépendance temporelle similaire à l'effet Josephson AC. De nombreuses différences apparaissent toutefois en raison de la nature non-abélienne du problème et du fait que les spins ne sont pas couplés au champ de

[2]Par antiferroaimant itinérant, nous entendons un antiferroaimant décrit correctement par l'approximation Hartree-Fock dont la phase paramagnétique est conductrice, par oppostion au cas où la phase paramagnétique est un isolant de Mott. Le mot itinérant ici ne signifie pas qu'il s'agit d'un métal, puisqu'il y a un gap.

jauge, mais directement au champ magnétique. Nous discutons ensuite de la possibilité de détecter expérimentalement l'effet que nous prédisons.

Dans la trosième partie de la thèse, nous revisitons la cas d'une jonction tunnel entre deux antiferroaimants itinérants, mais en allant au-delà de la réponse linéaire dans le calcul du courant de spin. Pour ce faire, nous utilisons la méthode des *self-énergies de contact*. Dans la limite d'une faible transparence tunnel, le résultat obtenu permet de retrouver la forme $\sim \mathbf{S}_G \times \mathbf{S}_D$ du courant de spin calculé en réponse linéaire.

Dans la quatrième partie de la thèse, nous considérons une jonction tunnel entre deux matériaux dans lesquels un ordre antiferromagnétique commensurable coexiste avec la supraconductivité de type d. Dans ce cas, le calcul du courant Josephson de spin montre que le courant critique est modulé par l'énergie Josephson $E_J \propto \cos\Delta\varphi$ où $\Delta\varphi$ est la différence de phase entre les paramètres d'ordre supraconducteurs de part et d'autre de la jonction. D'une façon tout à fait symétrique, la calcul du courant Josephson de charge montre que le courant critique (de charge) est modulé par l'énergie d'échange entre les moments magnétiques alternés de gauche et de droite $E_{éch} \propto \mathbf{S}_G \cdot \mathbf{S}_D \propto \cos\theta$ où θ est l'orientation relative entre les deux moments.

Mentionnons que les résultats de la première et de la seconde partie de la thèse se trouvent sur internet à la référence [32]. Ils apparaîtront dans la littérature avec ceux de la quatrième partie, mais trop tard pour que les références précises puissent être incluses ici.

Description microscopique de l'effet Josephson Standard

Il peut être intéressant pour terminer cette introduction de revoir les grandes lignes du calcul microscopique de l'effet Josephson standard. Ceci nous permettra notamment de mettre en évidence différentes analogies avec l'effet Josephson de spin dans les jonctions tunnel antifferomagnétiques.

Rappelons que dans la théorie BCS de la supraconductivité, la fonction d'onde décrivant l'état supraconducteur est un *état cohérent* de paires de Cooper. Plus précisément, en fonction de l'opérateur $\hat{P}^\dagger_{\mathbf{k}} = c^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow} c^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow}$, qui crée une paire d'électrons d'impulsion cristalline totale nulle et de spins opposés, cet état s'écrit sous la forme

$$|\Psi_{\mathrm{BCS}}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \left(u_{\mathbf{k}} + e^{i\varphi} v_{\mathbf{k}} \hat{P}^\dagger_{\mathbf{k}}\right)|0\rangle \tag{1}$$

où $u^2_{\mathbf{k}} + v^2_{\mathbf{k}} = 1$, φ est la phase et $|0\rangle$ est la mer de Fermi remplie. Les coefficients $u_{\mathbf{k}}$ et $v_{\mathbf{k}}$ restreignent essentiellement les valeurs de $\mathbf{k}$ à l'intérieur d'une coquille d'une épaisseur de l'ordre de la fréquence de Debye autour de la surface de Fermi (là où l'interaction électron-électron médiée par les phonons est attractive). Toutes les paires de Cooper sont donc ajoutées à la fonction d'onde avec exactement la même phase et c'est cette *cohérence de phase* qui est à l'origine même du phénomène de la supraconductivité.

Josephson supposa donc que les électrons peuvent traverser par effet tunnel la couche isolante séparant les deux supraconducteurs. Ceci revient à introduire dans l'hamiltonien de la jonction le terme de couplage tunnel

$$\hat{H}_T = \sum_{\mathbf{kq}\sigma} \left(t_{\mathbf{kq}} c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} d_{\mathbf{q}\sigma} + t^*_{\mathbf{kq}} d^\dagger_{\mathbf{q}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma}\right) \tag{2}$$

où $c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}(c_{\mathbf{k}\sigma})$ et $d^\dagger_{\mathbf{q}\sigma}(d_{\mathbf{q}\sigma})$ sont les opérateurs de création (annihilation) d'un électron à gauche et à droite de la jonction respectivement et $t_{\mathbf{kq}}$ est un élément de la matrice de transmission. En utilisant l'état BCS et la théorie des perturbations au deuxième ordre en $\hat{H}_T$, Josephson obtint le résultat remarquable qu'un courant doit circuler spontanément à travers la jonction conformément à l'expression

$$I = I_c \sin(\varphi_G - \varphi_D) \tag{3}$$

où φ_G et φ_D sont les phases des fonctions d'ondes $|G\rangle$ et $|D\rangle$ des supraconducteurs gauche et droit respectivement.

Il est possible d'expliquer l'origine de ce courant sans trop entrer dans les détails de calcul. En effet, si l'on considère (grossièrement) les effets au deuxième ordre en $\hat{H}_T$, on voit que $\hat{H}_T^2$ contient notamment des termes de la forme

$$\hat{H}_T^2 \sim t^2 \Big(c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} c^\dagger_{\mathbf{k}'\sigma'} d_{\mathbf{q}'\sigma'} d_{\mathbf{q}\sigma} + d^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} d^\dagger_{\mathbf{k}'\sigma'} c_{\mathbf{q}'\sigma'} c_{\mathbf{q}\sigma} + ... \Big) \ . \tag{4}$$

L'effet net du premier de ces termes est le transfert d'une paire d'électrons du supraconducteur de droite vers celui de gauche. Inversement, le second terme transfert une paire de la gauche vers la droite. Puisque les fonctions d'onde de part et d'autre de la jonction sont des états cohérents de paires de Cooper, ces opérateurs auront une valeur moyenne non-nulle

$$\begin{aligned} \langle G | c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} c^\dagger_{\mathbf{k}'\sigma'} | G \rangle &\neq 0 \\ \langle D | d_{\mathbf{q}'\sigma'} d_{\mathbf{q}\sigma} | D \rangle &\neq 0 \ . \end{aligned} \tag{5}$$

En fait, on peut vérifier que la première de ces valeurs moyennes est proportionnelle à $\mathrm{e}^{-i\varphi_G}$ et la seconde à $\mathrm{e}^{i\varphi_D}$, de sorte que l'amplitude quantique associée au transfert d'une paire de Cooper de la droite vers la gauche dépend d'un facteur de phase $\mathrm{e}^{i(\varphi_D - \varphi_G)}$. Le processus inverse, quant à lui, possède une amplitude qui est le complexe conjugué de la précédente. Par conséquent, en additionnant les deux contributions, on obtient un courant net proportionnel à $\sin(\varphi_G - \varphi_D)$.

L'équation (3) montre que le courant Josephson est généré en réponse à une différence de phase $\Delta\varphi \equiv \varphi_G - \varphi_D$ entre les deux supraconducteurs. Il s'agit donc, en quelque sorte, d'une preuve directe de l'existence de la cohérence de phase dans les supraconducteurs. La constante de proportionnalité I_c est appelée *courant critique* et représente le courant Josephson maximal pouvant circuler à travers la jonction. Pour des valeurs du courant $I < I_c$, le courant Josephson est non-dissipatif : il s'agit d'un supercourant. Cependant, si l'on porte le courant à des valeurs supérieures, $I > I_c$, le courant devient dissipatif et une différence de potentiel finie V se crée à travers la jonction.

Par ailleurs, lorsqu'une différence de potentiel finie $V = V_G - V_D$ est appliquée à travers la jonction tout en maintenant $I < I_c$, Josephson obtint le résultat surprenant que le supercourant tunnel devient alternatif. Ceci peut s'expliquer en remarquant que l'hamiltonien de chacun des supraconducteurs comporte alors un terme additionnel : $-eV_G\hat{N}_G$ à gauche et $-eV_D\hat{N}_D$ à droite, où $\hat{N}$ est l'opérateur nombre de particules.

L'équation d'Heisenberg implique donc que les opérateurs fermioniques acquièrent un facteur de phase comme suit[3] :

$$\begin{aligned} c^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}(t) &\rightarrow c^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\mathrm{e}^{-ieV_G t/\hbar} \\ d^{\dagger}_{\mathbf{q}\sigma}(t) &\rightarrow d^{\dagger}_{\mathbf{q}\sigma}(t)\mathrm{e}^{-ieV_D t/\hbar} \ . \end{aligned} \tag{6}$$

En substituant (6) dans le calcul des valeurs moyennes à l'équation (5), on obtient alors que l'argument de la fonction sinus dans l'expression du courant Josephson devient linéairement dépendante du temps

$$I = I_c \sin\left(\Delta\varphi(0) + \frac{2eV}{\hbar}t\right) \tag{7}$$

et donc que le courant lui-même oscille à la fréquence

$$\nu = \frac{2eV}{\hbar} \ . \tag{8}$$

Cet effet remarquable est appelé *effet Josephson AC* (par opposition à l'*effet Josephson DC* lorsque $I < I_c$ et $V = 0$).

L'observation expérimentale de l'effet Josephson AC constitue non seulement une confirmation de la théorie BCS (en particulier de la validité de l'état cohérent qui en constitue la clef de voûte), mais elle fournit également une démonstration empirique directe que l'unité de charge pertinente en supraconductivité est $2e$ et non e, confirmant ainsi l'hypothèse des paires de Cooper.

Il est intéressant de noter, par ailleurs, que l'exactitude avec laquelle la fréquence Josephson respecte la relation (8) est telle que l'effet a été incorporé parmi les méthodes standards de mesure utilisées pour définir le système d'unités SI. En mesurant la fréquence (laquelle peut-être mesurée avec une précision de l'ordre d'une partie par 10^{12}), et le voltage V, on obtient le ratio des constantes fondamentales $e/\hbar$ avec une très grande

[3]Précisons que cette factorisation n'est valide que si l'opérateur nombre commute avec le terme d'interaction dans l'hamiltonien, ce qui est possible seulement avec le terme d'interaction quartique original précédant l'approximation champ moyen BCS. La preuve est alors identique à celle des équations (3.4) et (3.5).

précision. En retour, la valeur de $e/\hbar$ et l'effet Josephson permettent de définir un étalon de voltage.

L'effet Josephson est notamment au coeur de nombreuses applications pratiques de la supraconductivité. À ce titre, mentionnons le SQUID (acromyme de *Superconductive Quantum Interference Device*), qui constitue un moyen simple, mais le plus précis qui soit, pour mesurer le flux magnétique.

Chapitre 1

Modèle microscopique d'une jonction tunnel AF/I/AF

Dans ce chapitre, nous décrivons le modèle microscopique que nous allons utiliser afin de représenter une jonction tunnel entre deux antifferoaimants itinérants séparés par une mince couche isolante. En particulier, nous motivons et donnons une description détaillée de l'hamiltonien champ moyen ODS (*onde de densité de spin*) de l'antiferromagnétisme itinérant et soulignons certaines analogies avec le modèle microscopique BCS d'un supraconducteur s-wave. Nous montrons aussi comment introduire d'emblée dans l'hamiltonien tunnel la non-colinéarité possible des moments magnétiques alternés de chacun des antiferroaimants.

1.1 Hamiltonien général d'une jonction tunnel

L'hamiltonien général d'une jonction tunnel constituée de deux matériaux séparés par une mince couche isolante s'écrit

$$\hat{H} = \hat{H}_G(c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}, c_{\mathbf{k}\sigma}) + \hat{H}_D(d^\dagger_{\mathbf{q}\sigma}, d_{\mathbf{q}\sigma}) + \hat{H}_T \ , \tag{1.1}$$

$$\hat{H}_T = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{kq}\sigma}\left(t_{\mathbf{kq}}\, c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} d_{\mathbf{q}\sigma} + h.c.\right) \ , \tag{1.2}$$

où $\hat{H}_{G(D)}$ est l'hamiltonien du matériau gauche (droit), $\hat{H}_T$ est le terme tunnel qui couple les deux matériaux et où $c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}(c_{\mathbf{k}\sigma})$ et $d^\dagger_{\mathbf{q}\sigma}(d_{\mathbf{q}\sigma})$ sont les opérateurs fermioniques de création (annihilation) à gauche et à droite de la jonction respectivement. Les éléments de matrice $t_{\mathbf{kq}}$ sont supposés indépendants du spin, de sorte que le spin de l'électron est conservé à travers la jonction. Dans les développements subséquents, les nombres quantiques $\mathbf{k}$ et $\mathbf{q}$ serviront aussi à désigner implicitement les côtés gauche et droit de la jonction.

Dans le cas qui nous intéresse, il est utile que $\hat{H}_G$ et $\hat{H}_D$ reflètent explicitement la présence de l'ordre magnétique à longue portée. Plus précisément, afin de modéliser l'antiferromagnétisme itinérant de part et d'autre de la jonction, nous procéderons comme en Réf.[33] et utiliserons un modèle de Hubbard à une bande dans l'approximation Hartree-Fock pour une onde de densité de spin statique de vecteur d'onde $\mathbf{Q} = (\pi, \pi)$.

1.2 L'hamiltonien ODS

Considérons tout d'abord l'hamiltonien de Hubbard bidimensionnel [34] sur un réseau carré

$$\hat{H}_{\text{hub}} = -t \sum_{\substack{\langle i,j \rangle \\ \alpha}} (c^\dagger_{i,\alpha} c_{j,\alpha} + h.c) + U \sum_i \hat{n}_{i\uparrow} \hat{n}_{i\downarrow} \ , \tag{1.3}$$

où $\langle i, j \rangle$ dénote les plus proches voisins, t est l'élément de matrice de saut, U l'intensité de l'interaction locale et $\hat{n}_{i\sigma} = c^\dagger_{i,\sigma} c_{i,\sigma}$. Dans l'espace des impulsions, $\hat{H}_{\text{hub}}$ s'écrit

$$\hat{H}_{\text{hub}} = \sum_{\mathbf{k},\alpha} \epsilon_{\mathbf{k}} c^\dagger_{\mathbf{k},\alpha} c_{\mathbf{k},\alpha} + \frac{U}{2N} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'\mathbf{q}} \sum_{\substack{\alpha\alpha' \\ \beta\beta'}} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'} c^\dagger_{\mathbf{k}',\alpha'} c^\dagger_{-\mathbf{k}'+\mathbf{q},\beta'} c_{-\mathbf{k}+\mathbf{q},\beta} c_{\mathbf{k},\alpha} \ , \tag{1.4}$$

où

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = -2t(\cos k_x a + \cos k_y a) \ , \tag{1.5}$$

α, β sont des états de spin quantifiés dans la direction $\hat{\mathbf{z}}$, a est le pas du réseau et N est le nombre total de sites.

L'état fondamental sans interaction ($U = 0$) de $\hat{H}_{\text{hub}}$ est défini par

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{k},\alpha}|0\rangle &= 0\ , \quad \epsilon_{\mathbf{k}} > E_F\ , \\ c^{\dagger}_{\mathbf{k},\alpha}|0\rangle &= 0\ , \quad \epsilon_{\mathbf{k}} < E_F\ , \end{aligned} \tag{1.6}$$

où E_F est l'énergie de Fermi. À demi-remplissage, la surface de Fermi est un carré parfait [le contour d'énergie nulle de (1.5) ; voir Fig.1.1].

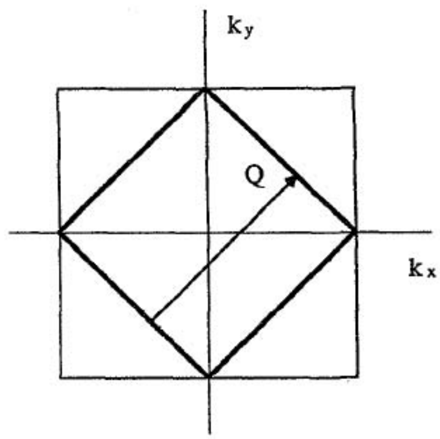

FIG. 1.1 – Le grand carré représente la première zone de Brillouin. Le petit carré représente la zone de Brillouin magnétique, qui est aussi la surface de Fermi des électrons libres pour un modèle à demi-rempli. **Q** est le vecteur d'emboîtement (de l'anglais *nesting*), aussi appelé vecteur d'onde antiferromagnétique.

Proposition 1. *À demi-remplissage, l'état fondamental sans interaction* $|0\rangle$ *de l'hamiltonien de Hubbard (1.3) est instable par rapport aux fluctuations de densité de spin.*

Démonstration. Considérons les susceptibilités de charge et de spin définies par

$$\chi^{00}(\mathbf{q}, t) = i\langle 0|T\rho_{\mathbf{q}}(t)\rho_{-\mathbf{q}}(0)|0\rangle\ , \tag{1.7}$$

$$\chi^{ij}(\mathbf{q}, t) = i\langle 0|TS^{i}_{\mathbf{q}}(t)S^{j}_{-\mathbf{q}}(0)|0\rangle\ , \tag{1.8}$$

où T est l'opérateur d'ordonnement dans le temps, $\rho_{\mathbf{q}}$ est l'opérateur de densité de charge défini par

$$\rho_{\mathbf{q}} = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\alpha} c^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\alpha} c_{\mathbf{k},\alpha}\ , \tag{1.9}$$

$S^i_{\mathbf{q}}$ est l'opérateur de densité de spin défini par

$$S^i_{\mathbf{q}} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}\alpha\beta} c^\dagger_{\mathbf{k+q},\alpha} \sigma^i_{\alpha\beta} c_{\mathbf{k},\beta} \ , \tag{1.10}$$

et σ^i est la i^e matrice de Pauli. En l'absence d'interaction, ces fonctions de corrélation sont données par

$$\chi_0^{00}(\mathbf{q},\omega) = \frac{2}{N^2} \sum_{\mathbf{k}} \left(-\frac{n_{\mathbf{k}}(1-n_{\mathbf{k+q}})}{\omega + \epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k+q}} - i\eta} + \frac{n_{\mathbf{k+q}}(1-n_{\mathbf{k}})}{\omega + \epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k+q}} + i\eta} \right) \tag{1.11}$$

et $\chi_0^{ij}(\mathbf{q},\omega) = \delta^{ij}\chi_0^{00}(\mathbf{q},\omega)$ où $n_{\mathbf{k}} = \sum_\sigma \langle c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma} \rangle$ est le nombre d'occupation électronique. En présence de l'interaction ($U \neq 0$), ces fonctions de corrélation peuvent être calculées en utilisant l'approximation de la phase aléatoire (*random phase approximation* ou RPA), laquelle peut se représenter graphiquement comme la somme sur une série infinie de diagrammes en bulles et de diagrammes en échelles (voir Fig.1.2).

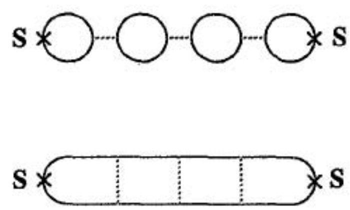

FIG. 1.2 – Les diagrammes de Feynman utilisés en RPA pour calculer χ^{00}_{RPA} et χ^{ij}_{RPA}. Une ligne pleine représente un propagateur sans interaction. La ligne pointillée représente l'interation U.

Cette sommation s'obtient aisément en utilisant l'équation de Dyson. Dans le canal de charge, on trouve

$$\chi^{00}_{RPA}(\mathbf{q},\omega) = \frac{\chi_0^{00}(\mathbf{q},\omega)}{1 + \frac{U}{2}\chi_0^{00}(\mathbf{q},\omega)} \tag{1.12}$$

et dans le canal de spin, le résultat est

$$\chi^{ij}_{RPA}(\mathbf{q},\omega) = \frac{\chi_0^{00}(\mathbf{q},\omega)}{1 - \frac{U}{2}\chi_0^{00}(\mathbf{q},\omega)} \delta^{ij} \ . \tag{1.13}$$

À demi-remplissage, la surface de Fermi possède la propriété d'emboîtement (de l'anglais *nesting*), ce qui signifie qu'il existe un vecteur $\mathbf{Q}$ reliant des points opposés de la surface de Fermi. Cette propriété implique que le dénominateur d'énergie $\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}$ s'annule pour une plage finie de valeurs de $\mathbf{k}$ au vecteur d'emboîtement $\mathbf{Q}$ dans $\chi_0^{00}(\mathbf{q} = \mathbf{Q}, \omega = 0)$, de sorte que la susceptibilité est particulièrement grande pour ce vecteur d'onde $\mathbf{Q}$. Dans ce cas, pour des températures $T < T_c$ et des temps $t \gg 0$, $\chi_{RPA}^{ij}(\mathbf{Q}, t) \sim \exp(\Omega_Q t)$, où Ω_Q est réel et positif. Ceci nous indique que la surface de Fermi à l'état normal $|0\rangle$ définie en (1.6) est instable et que le véritable état fondamental $|\Omega\rangle$ est celui présentant une onde de densité de spin statique de vecteur d'onde $\mathbf{Q}$. $\square$

Sans perte de généralité, on peut supposer que l'onde de densité de spin (ODS) est polarisée dans la direction de l'axe de quantification de spin :

$$\langle \Omega | S_{\mathbf{Q}}^z | \Omega \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k},\alpha,\alpha'} \langle c_{\mathbf{k}+\mathbf{Q},\alpha}^\dagger \sigma_{\alpha\alpha'}^3 c_{\mathbf{k},\alpha'} \rangle \equiv S \ , \tag{1.14}$$

où le paramètre d'ordre S sera déterminé plus loin par des conditions d'autocohérence. En présence de ce champ moyen, la factorisation Hartree-Fock de (1.4) est [voir l'annexe A]

$$\hat{H}^{ODS} = \sum_{\mathbf{k},\alpha} \epsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger c_{\mathbf{k},\alpha} - \frac{US}{2} \sum_{\mathbf{k},\alpha,\alpha'} c_{\mathbf{k}+\mathbf{Q},\alpha}^\dagger \sigma_{\alpha\alpha'}^3 c_{\mathbf{k},\alpha'} \ . \tag{1.15}$$

Cet hamiltonien à un corps se diagonalise au moyen de la transformation de Bogoliubov suivante

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{k},\alpha}^c &= u_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\alpha} + v_{\mathbf{k}} \sum_\beta (\sigma^3)_{\alpha\beta} c_{\mathbf{k}+\mathbf{Q},\beta} \ , \\ \gamma_{\mathbf{k},\alpha}^v &= v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k},\alpha} - u_{\mathbf{k}} \sum_\beta (\sigma^3)_{\alpha\beta} c_{\mathbf{k}+\mathbf{Q},\beta} \end{aligned} \tag{1.16}$$

où $\mathbf{k}$ est restreint à la zone de Brillouin magnétique afin d'éviter la redondance dans la somme sur les vecteurs d'onde. Les indices supérieurs c et v réfèrent à la séparation entre bande de conduction et bande de valence provoquée par la diffusion de Bragg sur l'onde de densité de spin. La relation de dispersion (1.5), valable pour un modèle de Hubbard avec saut au plus proche voisin, implique que $\epsilon_{\mathbf{k}} = -\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}$ pour toute valeur de $\mathbf{k}$. Dans ce cas, les amplitudes de la transformation sont données par

$$
\begin{aligned}
u_{\mathbf{k}} &= \left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}}\right)\right]^{1/2} , \\
v_{\mathbf{k}} &= \left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}}\right)\right]^{1/2} , \\
E_{\mathbf{k}} &= (\epsilon_{\mathbf{k}}^2+\Delta^2)^{1/2} , \\
\Delta &= \frac{US}{2} ,
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

où Δ est le paramètre de gap ODS [1]. L'hamiltonien diagonalisé est donné par

$$
\hat{H}^{ODS} = \sum_{\mathbf{k},\alpha}^{*} E_{\mathbf{k}}\big(\gamma_{\mathbf{k},\alpha}^{\dagger c}\gamma_{\mathbf{k},\alpha}^{c} - \gamma_{\mathbf{k},\alpha}^{\dagger v}\gamma_{\mathbf{k},\alpha}^{v}\big) , \tag{1.18}
$$

où * indique que la somme sur $\mathbf{k}$ est restreinte à la zone de Brillouin magnétique. Le spectre d'énergie est donné par $\pm E_{\mathbf{k}}$.

L'état fondamental $|\Omega\rangle$ pour un modèle à une bande demi-remplie est défini par

$$
\gamma_{\mathbf{k},\alpha}^{\dagger v}|\Omega\rangle = \gamma_{\mathbf{k},\alpha}^{c}|\Omega\rangle = 0 . \tag{1.19}
$$

En utilisant cette définition de $|\Omega\rangle$ dans (1.14), on obtient la condition d'autocohérence suivante pour le gap antiferromagnétique Δ :

$$
\langle\Omega|S_{\mathbf{Q}}^{z}|\Omega\rangle = \frac{4}{N}\sum_{\mathbf{k}}^{*}\frac{\Delta}{2E_{\mathbf{k}}} = \frac{2\Delta}{U} \tag{1.20}
$$

ou

$$
\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}}^{*}\frac{1}{(\epsilon_{\mathbf{k}}^2+\Delta^2)} = \frac{1}{U} . \tag{1.21}
$$

En raison de la singularité dans la densité d'états au niveau de Fermi, la solution de cette équation de gap pour de petites valeurs de U est donnée par

$$
\Delta \sim te^{-2\pi\sqrt{t/U}} , \tag{1.22}
$$

alors que pour $t \ll U$, le gap prend la valeur $2\Delta = U$, soit celle du gap de Mott-Hubbard.

[1]Nous nous limitons au sauts au plus proches voisins afin de simplifier l'expression des amplitudes de transformation, mais notre résultat pour le courant de moment magnétique alterné, soit Éq.(2.37) et Éq.(2.38), demeure valide pour un modèle étendu. Un courant de spin sans dissipation se produira si U est suffisamment grand pour que l'excitation de quasi-particules soit gapée.

1.3 Analogie avec l'état fondamental BCS

L'état fondamental $|\Omega\rangle$ de l'hamiltonien ODS peut s'écrire explicitement sous la forme

$$|\Omega\rangle = \prod_{\mathbf{k}\alpha}^{*} \gamma_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger v}|0\rangle \tag{1.23}$$

$$= \prod_{\mathbf{k}\alpha}^{*}(v_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger} - u_{\mathbf{k}}\sum_{\beta} c_{\mathbf{k+Q}\beta}^{\dagger}\sigma_{\beta\alpha}^{3})\,|0\rangle \tag{1.24}$$

$$= \prod_{\mathbf{k}\alpha}^{*}(v_{\mathbf{k}} - u_{\mathbf{k}}\sum_{\beta} c_{\mathbf{k+Q}\beta}^{\dagger}\sigma_{\beta\alpha}^{3}c_{\mathbf{k}\alpha})c_{\mathbf{k}\alpha}^{\dagger}\,|0\rangle\,. \tag{1.25}$$

Cette dernière expression rend évidente l'analogie avec l'état fondamental BCS (1). Par exemple, des réflexions de type Andreev peuvent survenir à une interface AF-N [35]. L'état fondamental ODS peut s'écrire comme un état cohérent de paires particule-trou. Afin de clarifier ce point, il est utile de faire une transformation particule-trou pour les états dans la première zone de Brillouin magnétique. Rappelons à cette fin que détruire un électron dans un état donné est équivalent à créer un trou dans l'état correspondant sous inversion du temps. Pour un spineur, on écrit donc

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{k}\uparrow} &\to h_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \\ c_{\mathbf{k}\downarrow} &\to -h_{-\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

L'état fondamental prend alors la forme suivante

$$|\Omega\rangle = \prod_{\mathbf{k}}^{*}(v_{\mathbf{k}} - u_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k+Q}\uparrow}^{\dagger}h_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger})(v_{\mathbf{k}} - u_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k+Q}\downarrow}^{\dagger}h_{-\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger})\,|0\rangle_{h} \tag{1.27}$$

où $c_{\mathbf{k+Q}\alpha}\,|0\rangle_h = 0$ et $h_{\mathbf{k}\alpha}\,|0\rangle_h = 0$. Les paires particule-trou sont dans un état de spin triplet avec une projection nulle sur l'axe de quantification. Elles sont de charge nulle et ont un vecteur d'onde égal au vecteur d'onde antiferromagnétique $\mathbf{Q}$. Dans le cas d'un ferroaimant, ce vecteur d'onde serait nul (et il n'y aurait pas de dédoublement de la zone de Brillouin).

Un autre point qu'il est intéressant de discuter est l'analogue de la cohérence de phase dans l'état fondamental ODS. De la même façon que chaque paire de Cooper est ajoutée avec la même phase dans l'état fondamental BCS, chaque paire particule-trou est ajoutée avec le même état de spin total dans l'état fondamental ODS. L'analogie est plus frappante lorsqu'on récrit l'expression (1.25) en orientant l'onde densité de spin selon une direction différente de l'axe de quantification de spin $\hat{\mathbf{z}}$, disons selon $\hat{\mathbf{s}} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$. Ce vecteur $\hat{\mathbf{s}}$ est appelé *vecteur de Néel*. Comme nous le verrons à la section suivante, on peut alors écrire $c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\beta} = \sum_\delta c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\delta} U_{\delta\beta}$ où β (respectivement δ) est un état de spin $\uparrow$ ou $\downarrow$ selon $\hat{\mathbf{s}}$ (respectivement $\hat{\mathbf{z}}$) et $U = e^{-i\sigma^3\frac{\phi}{2}} e^{-i\sigma^2\frac{\theta}{2}}$. Alors (1.25) peut se récrire comme suit

$$|\Omega\rangle = \prod_{\mathbf{k}\alpha}^{*} (v_\mathbf{k} - u_\mathbf{k} \sum_{\beta\delta\gamma} c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\delta} U_{\delta\beta} \sigma^3_{\beta\alpha} U^\dagger_{\alpha\gamma} c_{\mathbf{k}\gamma}) \, |0\rangle_h \tag{1.28}$$

où la matrice $U\sigma^3 U^\dagger \in SU(2)$ est l'analogue du facteur de phase $e^{i\varphi} \in U(1)$ apparaissant dans l'expression (1) de l'état fondamental BCS. En fait, on peut montrer que $U\sigma^3 U^\dagger = \hat{\mathbf{s}} \cdot \vec{\sigma}$ où $\vec{\sigma} \equiv (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ est un vecteur de matrices de Pauli ; c'est la relation standard qui établit le lien entre $SU(2)$ et $SO(3)$.

1.4 L'hamiltonien tunnel

Le terme tunnel de l'hamiltonien s'écrit

$$\hat{H}_T = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{kq}\sigma} \left(t_{\mathbf{kq}} \, c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} d_{\mathbf{q}\sigma} + t^*_{\mathbf{kq}} \, d^\dagger_{\mathbf{q}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma} \right) , \tag{1.29}$$

où $\sigma = \uparrow, \downarrow$ dans la direction d'un axe de quantification de spin valide de part et d'autre de la jonction tunnel.

On s'attend à ce que l'effet Josephson de spin se produise lorsque les moments magnétiques alternés $\mathbf{S}_G$ et $\mathbf{S}_D$ des deux AF sont non-colinéaires. Une façon commode pour tenir compte de cette non-colinéarité dans nos calculs subséquents est d'introduire immédiatement dans $\hat{H}_T$ une transformation unitaire dans l'espace des spin. Ceci nous permettra de définir l'axe de quantification de spin dans la direction de $\mathbf{S}_G$ à gauche de la jonction et dans la direction de $\mathbf{S}_D$ à droite. Ainsi, l'hamiltonien ODS aura la même forme dans chacun des AF (puisque celui-ci a été défini dans le repère où l'axe de quantification de spin est parallèle à l'aimantation alternée).

Plus précisément, on choisit le système de coordonnées cartésiennes dans l'AF gauche de sorte à orienter l'axe de quantification de spin (axe $\hat{\mathbf{z}}$) selon $\mathbf{S}_G$:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_G &= |\mathbf{S}_G|(0,0,1) \ , \\ \mathbf{S}_D &= |\mathbf{S}_D|(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \ , \end{aligned} \tag{1.30}$$

où (θ, ϕ) sont les coordonnées de $\mathbf{S}_D$ dans le système de coordonnées sphériques correspondant de l'AF gauche (voir Fig.1.3). De même, on choisit le système de coordonnées cartésiennes dans l'AF droit de sorte à orienter l'axe de quantification de spin selon $\mathbf{S}_D$:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_G &= |\mathbf{S}_G|(\sin\theta\cos(\phi+\pi), \sin\theta\sin(\phi+\pi), \cos\theta) \ , \\ \mathbf{S}_D &= |\mathbf{S}_D|(0,0,1) \ . \end{aligned} \tag{1.31}$$

Il est alors possible d'écrire

$$\hat{H}_T = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{kq}\sigma\delta}\left(t_{\mathbf{kq}}\, c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} U_{\sigma\delta} d_{\mathbf{q}\delta} + t^*_{\mathbf{kq}}\, d^\dagger_{\mathbf{q}\delta} U^\dagger_{\delta\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma}\right) \ , \tag{1.32}$$

où $\sigma(\delta) =\uparrow, \downarrow$ dans la direction de $\mathbf{S}_G$ ($\mathbf{S}_D$) et

$$U(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}\cos(\theta/2) & -e^{-i\phi/2}\sin(\theta/2) \\ e^{i\phi/2}\sin(\theta/2) & e^{i\phi/2}\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \ . \tag{1.33}$$

Démonstration de (1.32)-(1.33). La formule générale de changement de base est

$$|\sigma\rangle = \sum_\delta |\delta\rangle\langle\delta|\sigma\rangle \tag{1.34}$$

$$d^\dagger_{\mathbf{q}\sigma} = \sum_\delta \tilde{d}^\dagger_{\mathbf{q}\delta}\langle\delta|\sigma\rangle \ . \tag{1.35}$$

On choisit la base de spin à gauche $\sigma = \{|\uparrow_G\rangle, |\downarrow_G\rangle\}$ dans la direction de $\pm\mathbf{S}_G$ et la base de spin à droite $\delta = \{|\uparrow_D\rangle, |\downarrow_D\rangle\}$ dans la direction de $\pm\mathbf{S}_D$. La relation entre σ et δ est :

$$|\uparrow_D\rangle = e^{-i\sigma^3\frac{\phi}{2}} e^{-i\sigma^2\frac{\theta}{2}} |\uparrow_G\rangle \ , \tag{1.36}$$

$$|\downarrow_D\rangle = e^{-i\sigma^3\frac{\phi}{2}} e^{-i\sigma^2\frac{\theta}{2}} |\downarrow_G\rangle \ . \tag{1.37}$$

La formule de transformation est donc donnée par

$$U = e^{-i\sigma^3 \frac{\phi}{2}} e^{-i\sigma^2 \frac{\theta}{2}} \ , \tag{1.38}$$

ce qui correspond à la combinaison d'une rotation d'un angle θ autour de l'axe $\hat{y}$, $R_y(\theta) = e^{-i\sigma^2 \frac{\theta}{2}}$, suivie d'une rotation d'un angle ϕ autour de l'axe $\hat{z}$, $R_z(\phi) = e^{-i\sigma^3 \frac{\phi}{2}}$.

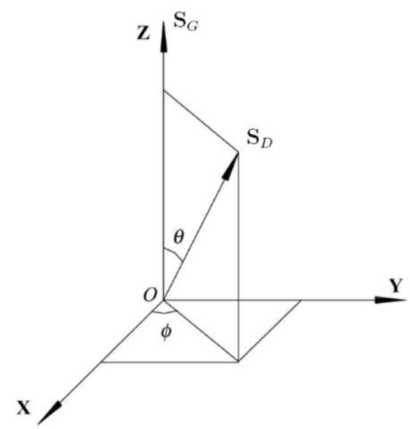

FIG. 1.3 – Système de coordonnées cartésiennes et sphériques de l'AF gauche.

Explicitement, on obtient

$$\begin{aligned}
U(\theta,\phi) &= \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} \end{pmatrix} \Big(\sigma^0 \cos(\theta/2) - i\sigma^2 \sin(\theta/2)\Big) \\
&= \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}\cos(\theta/2) & -e^{-i\phi/2}\sin(\theta/2) \\ e^{i\phi/2}\sin(\theta/2) & e^{i\phi/2}\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \ .
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Dans la base de gauche σ, on a

$$\begin{aligned}
\langle \uparrow_G \mid \uparrow_D \rangle &= U_{\uparrow\uparrow} \ , \langle \uparrow_G \mid \downarrow_D \rangle = U_{\uparrow\downarrow} \ , \\
\langle \downarrow_G \mid \uparrow_D \rangle &= U_{\downarrow\uparrow} \ , \langle \downarrow_G \mid \downarrow_D \rangle = U_{\downarrow\downarrow} \ .
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Substituant (1.40) dans (1.35), on obtient

$$d_{\mathbf{q}\sigma} = \sum_{\delta} U_{\sigma\delta} \tilde{d}_{\mathbf{q}\delta} \tag{1.41}$$

et en prenant l'adjoint

$$d^\dagger_{\mathbf{q}\sigma} = \sum_\delta \tilde{d}^\dagger_{\mathbf{q}\delta} U^\dagger_{\delta\sigma} \ , \tag{1.42}$$

ce qui, après substitution dans (1.29), donne finalement

$$\hat{H}_T = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{kq}\sigma\delta} \left(t_{\mathbf{kq}} \, c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} U_{\sigma\delta} \tilde{d}_{\mathbf{q}\delta} + t^*_{\mathbf{kq}} \, \tilde{d}^\dagger_{\mathbf{q}\delta} U^\dagger_{\delta\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma} \right) \ .$$

□

Dans la suite de la thèse, nous omettrons le symbole "˜" au-dessus des opérateurs de création et d'annihilation dans la base de droite afin de simplifier la notation.

Remarque 2. *Rappelons que le spin est conservé à travers la jonction et que ces transformations unitaires ne sont introduites dans $\hat{H}_T$ qu'afin de refléter le choix d'un axe de quantification différent de chaque côté de la jonction. Ce changement de système de référence peut aussi être vu comme un choix de jauge où tout l'effet de la différence d'orientation du moment antiferromagnétique est reporté sur le terme de saut.*

Chapitre 2

Effet Josephson DC de spin dans une jonction tunnel AF/I/AF

Dans ce chapitre, nous étudions l'effet Josephson DC de spin dans une jonction tunnel entre deux antiferroaimants itinérants. En adoptant une approche microscopique analogue à celle utilisée par Ambegaokar & Baratoff [36] pour le calcul de l'effet Josephson standard, nous obtenons l'expression pour le courant de moment magnétique alterné à travers la jonction. Nous constatons certaines analogies avec le cas standard et discutons aussi des spécificités propres au courant Josephson de moment magnétique alterné.

2.1 Calcul du courant de moment magnétique alterné

Dans cette section, nous obtenons une expression générale pour le courant Josephson de moment magnétique alterné à travers la jonction tunnel. Comme nous venons de le mentionner, notre approche s'inspire fortement de celle utilisée par Ambegaokar & Baratoff pour le calcul de l'effet Josephson standard. Dans ce dernier cas, si la jonction tunnel n'est pas reliée à un circuit, le courant électrique entre les deux supraconducteurs est bien décrit par la valeur moyenne du taux de variation instantané de l'opérateur nombre du supraconducteur gauche $\mathbf{J} \propto \langle d\hat{N}_G/dt \rangle$, où $\hat{N}_G = \sum_{\mathbf{k}\sigma} c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma}$.

Dans le cas qui nous occupe, l'analogue de $\hat{N}_G$ est l'opérateur de moment magnétique alterné de l'antiferroaimant gauche[1] :

$$\hat{\mathbf{S}}_G = (\hbar/2) \sum_{\mathbf{k}\alpha\beta} c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha} \vec{\sigma}_{\alpha\beta} c_{\mathbf{k}\beta} \tag{2.1}$$

où $\vec{\sigma} \equiv (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ est un vecteur de matrices de Pauli. Nous allons donc définir le courant de moment magnétique alterné $\mathbf{I}_S$ à travers la jonction tunnel comme la moyenne thermique du taux de variation instantané de l'opérateur de moment magnétique alterné de l'antiferroaimant gauche :

$$\mathbf{I}_S \equiv \langle d\hat{\mathbf{S}}_G/dt \rangle. \tag{2.2}$$

Dans la représentation d'Heisenberg, l'évolution temporelle de $\hat{\mathbf{S}}_G$ est dictée par l'*équation d'Heisenberg*,

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{S}}_G = \frac{1}{i\hbar}[\hat{\mathbf{S}}_G, \hat{H}] \ ,$$

où $\hat{H}$ est l'hamiltonien total du système. En substituant ceci dans la définition de $\mathbf{I}_S$, on obtient

$$\mathbf{I}_S(t) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{kq}} \sum_{\alpha\beta\delta} \mathrm{Im}\Big[\vec{\sigma}_{\alpha\beta} U_{\beta\delta}\, t_{\mathbf{kq}} \big\langle c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}(t) d_{\mathbf{q}\delta}(t) \big\rangle \Big] \ , \tag{2.3}$$

où $\langle ... \rangle$ est calculé avec la matrice densité complète.

Démonstration de (2.3). Dans l'état à symétrie brisée, l'évolution temporelle de $\hat{\mathbf{S}}_G$ due à $\hat{H}^{ODS}_G$ est négligeable, puisque $[\hat{S}^z_G, \hat{H}^{ODS}_G] = 0$ dans l'approximation champ moyen. Comme les opérateurs $\{c_{\mathbf{k}\sigma}, c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}\}$ commutent avec les opérateurs $\{d_{\mathbf{q}\delta}, d^\dagger_{\mathbf{q}\delta}\}$, nous avons

[1] En supraconductivité, $\hat{N}_G$ est conjugué à la phase φ, le générateur infinitésimal de $U(1)$. Ici il y a trois générateurs infinitésimaux de SU(2). Lorsque la symétrie brisée est l'aimantation alternée selon $\hat{\mathbf{z}}$, le générateur infinitésimal $SU(2)$ des rotations selon $\hat{\mathbf{x}}$ par exemple est $S^x(\mathbf{q})$ à $\mathbf{q} = 0$ (analogue de φ). Cet opérateur est conjugué à $S^y(\mathbf{q})$ à $\mathbf{q} = (\pi, \pi)$ puisque $S^z(\mathbf{q})$ à $\mathbf{q} = (\pi, \pi)$ peut être pris comme un nombre (ce nombre est le paramètre d'ordre S qui intervient dans Δ). Il est donc raisonnable de regarder l'évolution de l'aimantation alternée dans une direction générale comme analogue de l'évolution de $\hat{N}_G$ dans le cas Josephson.

aussi $[\hat{\mathbf{S}}_G, \hat{H}_D^{ODS}] = 0$. Il s'ensuit donc que l'équation d'Heisenberg se réduit à $d\hat{\mathbf{S}}_G/dt = (1/i\hbar)[\hat{\mathbf{S}}_G, \hat{H}_T]$. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
d\hat{\mathbf{S}}_G/dt &= \frac{1}{i\hbar}\Big[\frac{\hbar}{2}\sum_{\mathbf{k}\alpha\beta} c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}\vec{\sigma}_{\alpha\beta}c_{\mathbf{k}\beta}, \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{pq}\sigma\delta}\big(t_{\mathbf{pq}}\, c^\dagger_{\mathbf{p}\sigma}U_{\sigma\delta}d_{\mathbf{q}\delta} + t^*_{\mathbf{pq}}\, d^\dagger_{\mathbf{q}\delta}U^\dagger_{\delta\sigma}c_{\mathbf{p}\sigma}\big)\Big] && (2.4)\\
&= -\frac{i}{2N}\sum_{\substack{\mathbf{kpq}\\ \alpha\beta\sigma\delta}}\vec{\sigma}_{\alpha\beta}\left\{t_{\mathbf{pq}}U_{\sigma\delta}\big[c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}c_{\mathbf{k}\beta},\, c^\dagger_{\mathbf{p}\sigma}d_{\mathbf{q}\delta}\big] + t^*_{\mathbf{pq}}U^\dagger_{\delta\sigma}\big[c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}c_{\mathbf{k}\beta}, d^\dagger_{\mathbf{q}\delta}c_{\mathbf{p}\sigma}\big]\right\} && (2.5)\\
&= -\frac{i}{2N}\sum_{\substack{\mathbf{kpq}\\ \alpha\beta\sigma\delta}}\vec{\sigma}_{\alpha\beta}\left\{t_{\mathbf{pq}}U_{\sigma\delta}\big[c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}c_{\mathbf{k}\beta},\, c^\dagger_{\mathbf{p}\sigma}\big]\, d_{\mathbf{q}\delta} + t^*_{\mathbf{pq}}U^\dagger_{\delta\sigma}d^\dagger_{\mathbf{q}\delta}\, \big[c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}c_{\mathbf{k}\beta}, c_{\mathbf{p}\sigma}\big]\right\}, && (2.6)
\end{aligned}
$$

puisque $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$. Maintenant, comme $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$ et compte tenu des relations d'anticommutation $\{c_{\mathbf{k}\sigma}, c^\dagger_{\mathbf{k}'\sigma'}\} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{\sigma,\sigma'}$ et $\{c_{\mathbf{k}\sigma}, c_{\mathbf{k}'\sigma'}\} = 0$, ceci devient

$$
\begin{aligned}
d\hat{\mathbf{S}}_G/dt &= -\frac{i}{2N}\sum_{\substack{\mathbf{kpq}\\ \alpha\beta\sigma\delta}}\vec{\sigma}_{\alpha\beta}\left\{t_{\mathbf{pq}}U_{\sigma\delta}\, c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}d_{\mathbf{q}\delta}\,\delta_{\mathbf{k},\mathbf{p}}\delta_{\beta,\sigma} - t^*_{\mathbf{pq}}U^\dagger_{\delta\sigma}\, d^\dagger_{\mathbf{q}\delta}c_{\mathbf{k}\beta}\,\delta_{\mathbf{k}+\mathbf{Q},\mathbf{p}}\delta_{\alpha,\sigma}\right\} && (2.7)\\
&= -\frac{i}{2N}\sum_{\mathbf{kq}}\sum_{\alpha\beta\delta}\big(\vec{\sigma}_{\alpha\beta}U_{\beta\delta}\, t_{\mathbf{kq}}c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}d_{\mathbf{q}\delta} - h.c.\big)\ . && (2.8)
\end{aligned}
$$

En prenant la moyenne thermique, on trouve donc

$$
\langle d\hat{\mathbf{S}}_G/dt\rangle = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{kq}}\sum_{\alpha\beta\delta}\mathrm{Im}\Big[\vec{\sigma}_{\alpha\beta}U_{\beta\delta}\, t_{\mathbf{kq}}\big\langle c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}(t)d_{\mathbf{q}\delta}(t)\big\rangle\Big]\ ,
$$

où $\langle ...\rangle$ est calculé avec la matrice densité complète. □

Nous allons calculer la valeur moyenne $\big\langle c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}(t)d_{\mathbf{q}\delta}(t)\big\rangle$ dans (2.3) au premier ordre en $\hat{H}_T$ en théorie des perturbations, autrement dit, dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire :

$$
\big\langle c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}(t)d_{\mathbf{q}\delta}(t)\big\rangle = -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' e^{-0^+(t-t')}\big\langle\big[c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}(t)d_{\mathbf{q}\delta}(t), \hat{H}_T(t')\big]\big\rangle_0\ , \qquad (2.9)
$$

où la moyenne thermique $\langle ... \rangle_0$ est calculée avec $\hat{H}_0 = \hat{H}_G^{ODS} + \hat{H}_D^{ODS}$ (la partie non-perturbée de $\hat{H}$) et les opérateurs à droite de l'égalité sont dans la représentation d'interaction.

La formule de réponse linéaire (2.9) est un résultat bien connu dont nous rappelons néanmoins la démonstration par souci de complétude.

Démonstration de (2.9). Soit $|j\rangle$, un état propre d'énergie E_j de l'hamiltonien non-perturbé $\hat{H}_0 = \hat{H}_G^{ODS} + \hat{H}_D^{ODS}$. Le vecteur d'état correspondant dans la représentation de Schrödinger, $|j_S(t)\rangle$, satisfait l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |j_S(t)\rangle = \hat{H}_0 |j_S(t)\rangle \tag{2.10}$$

avec solution

$$|j_S(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} |j_S(0)\rangle = e^{-iE_j t/\hbar} |j\rangle \ . \tag{2.11}$$

Supposons maintenant que le système est perturbé à un temps $t = t_0$ par le branchement de l'hamiltonien tunnel $\hat{H}_T(t)$. Le nouveau vecteur d'état $|\overline{j_S(t)}\rangle$ dans la représentation de Schrödinger satisfait alors l'équation modifiée ($t > t_0$)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\overline{j_S(t)}\rangle = [\hat{H}_0 + \hat{H}_T(t)] |\overline{j_S(t)}\rangle \ . \tag{2.12}$$

Nous cherchons une solution de la forme

$$|\overline{j_S(t)}\rangle = e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{A}(t) |j\rangle \tag{2.13}$$

où l'opérateur $\hat{A}(t)$ satisfait la condition frontière de causalité

$$\hat{A}(t) = 1 \quad , \qquad t \leq t_0 \ . \tag{2.14}$$

En combinant (2.12) et (2.13), on obtient l'équation suivante pour $\hat{A}(t)$:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}(t) &= e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{H}_T(t) e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{A}(t) \\ &\equiv \hat{H}_T^I(t) \hat{A}(t) \end{aligned} \tag{2.15}$$

où $\hat{H}_T^I(t)$ est dans la représentation d'interaction. L'équation (2.15) peut être solutionnée de façon itérative pour $t > t_0$

$$\hat{A}(t) = 1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' \hat{H}_T^I(t') + ... \tag{2.16}$$

où la condition frontière de causalité (2.14) est automatiquement satisfaite puisque $\hat{H}_T(t) = 0$ si $t < t_0$. Le vecteur d'état correspondant est donné par

$$|\overline{j_S(t)}\rangle = e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}|j\rangle - \frac{i}{\hbar}e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' \hat{H}_T^I(t')|j\rangle + ... \tag{2.17}$$

Maintenant, la moyenne thermique que nous cherchons à calculer est une somme pondérée sur les éléments de matrice diagonaux de l'opérateur $c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}(t)d_{\mathbf{q}\delta}(t)$, lequel est dans la représentation d'Heisenberg associé à l'hamiltonien total de la jonction. Or, comme les éléments de matrice d'un opérateur sont équivalents sous changement de représentation, on peut tout aussi bien passer dans la représentation de Schrödinger et calculer les éléments de matrice diagonaux $\langle\overline{j_S(t)}|c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}d_{\mathbf{q}\delta}|\overline{j_S(t)}\rangle$, où, comme il se doit, l'opérateur dans la représentation de Schrödinger est stationnaire. En ne conservant que les termes linéaires en $\hat{H}_T^I(t')$, on obtient

$$\begin{aligned}\langle\overline{j_S(t)}|c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}d_{\mathbf{q}\delta}|\overline{j_S(t)}\rangle &= \langle j|\Big[1 + \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' \hat{H}_T^I(t') + ...\Big] e^{i\hat{H}_0 t/\hbar}c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}d_{\mathbf{q}\delta}e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \\ &\qquad \times \Big[1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' \hat{H}_T^I(t') + ...\Big]|j\rangle \qquad (2.18) \\ &= \langle j|c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}(t)d_{\mathbf{q}\delta}(t)|j\rangle - \frac{i}{\hbar}\langle j|\int_{t_0}^{t} dt' [c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}(t)d_{\mathbf{q}\delta}(t), \hat{H}_T^I(t')]|j\rangle + ... \\ &\qquad (2.19)\end{aligned}$$

où les opérateurs dans (2.19) sont dans la représentation d'interaction. Le premier terme à droite de l'égalité dans (2.19) est nul puisqu'il ne respecte pas la conservation du nombre total de particules du système. Donc,

$$\langle\overline{j_S(t)}|c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}d_{\mathbf{q}\delta}|\overline{j_S(t)}\rangle = -\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' \langle j|\big[c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}(t)d_{\mathbf{q}\delta}(t), \hat{H}_T(t')\big]|j\rangle \ . \tag{2.20}$$

On peut étendre la borne inférieure d'intégration à $-\infty$ à condition d'introduire un facteur $e^{-0^+(t-t')}$ pour assurer la convergence de l'intégrale. Pour obtenir la moyenne thermique, on prend la somme pondérée de (2.20) sur les états non-perturbés (afin de demeurer au premier ordre en $\hat{H}_T$). Nous faisons ici le choix de laisser évoluer les opérateurs plutôt que la matrice densité. On obtient alors :

$$\left\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}(t) d_{\mathbf{q}\delta}(t)\right\rangle = -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' e^{-0^{+}(t-t')} \sum_{j} e^{\beta[\Omega - E_j]} \langle j| \left[c^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}(t) d_{\mathbf{q}\delta}(t), \hat{H}_T(t')\right] |j\rangle \tag{2.21}$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\int_{\infty}^{t} dt' e^{-0^{+}(t-t')} \left\langle \left[c^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}(t) d_{\mathbf{q}\delta}(t), \hat{H}_T(t')\right]\right\rangle_0 \tag{2.22}$$

où $\beta = 1/k_B T$ et $\Omega = -k_B T ln Z$ avec Z, la fonction de partition. La moyenne est prise dans l'ensemble canonique, car le nombre total de particules dans le système est conservé. $\square$

Remarque 3 (***Parallèles avec l'effet Josephson standard***)**.** *Une fois le commutateur évalué dans l'équation (2.9), une des factorisations de la fonction de corrélation à quatre points implique des produits de fonctions de corrélations dans l'antiferroaimant gauche et droit de la forme*

$$\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}(t) c_{\mathbf{k}\alpha}(t')\rangle_0 \langle d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}\delta}(t) d^{\dagger}_{\mathbf{q}\delta}(t')\rangle_0 \ . \tag{2.23}$$

Ces fonctions de corrélations seraient nulles dans l'état normal paramagnétique, mais elles ne le sont pas dans le cas présent en raison de la symétrie brisée. L'expression (2.23) représente une interférence dans le processus tunnel entre des particules de spin $\uparrow$ *(*$\downarrow$*) et d'impulsion* $\mathbf{k}+\mathbf{Q}$ *et des trous de spin* $\downarrow$ *(*$\uparrow$*) et d'impulsion* $-\mathbf{k}$*. En d'autres mots, elle représente l'effet tunnel cohérent de paires particule-trou de charge nulle, spin* 1*,* $S^z = 0$ *et d'impulsion finie* $\mathbf{Q}$ *qui sont présentent dans l'état fondamental Éq.(1.25). Dans le cas de l'effet Josephson standard, on trouverait des termes de la forme*

$$\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}(t) c^{\dagger}_{-\mathbf{k}-\sigma}(t')\rangle_0 \langle d_{\mathbf{q}\sigma}(t) d_{-\mathbf{q}-\sigma}(t')\rangle_0$$

qui représentent l'effet tunnel cohérent de paires de Cooper.

Afin de calculer les moyennes $\langle ... \rangle_0$ dans l'état à symétrie brisée, nous inversons d'abord la transformation de Bogoliubov Éq. (1.16),

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{k}\alpha} &= u_{\mathbf{k}} \gamma^c_{\mathbf{k}\alpha} + v_{\mathbf{k}} \gamma^v_{\mathbf{k}\alpha} \ , \\ c_{\mathbf{k+Q},\alpha} &= \sigma^3_{\alpha\alpha} \big(v_{\mathbf{k}} \gamma^c_{\mathbf{k}\alpha} - u_{\mathbf{k}} \gamma^v_{\mathbf{k}\alpha} \big) \ . \end{aligned} \tag{2.24}$$

En supposant $t_{\mathbf{kq}} = t_{\mathbf{kq+Q}} = t_{\mathbf{k+Qq}} = t_{\mathbf{k+Qq+Q}}$, on peut alors récrire le membre de gauche du commutateur dans (2.9) sous la forme (voir annexe B)

$$\sum_{\mathbf{kq}} t_{\mathbf{kq}} c^\dagger_{\mathbf{k+Q}\alpha} d_{\mathbf{q}\delta} = \sum^*_{\mathbf{kq}} \sum_{i,j \in \{c,v\}} t_{\mathbf{kq}} (\Gamma^{\alpha\delta}_{\mathbf{kq}})_{ij} \gamma^{i\dagger}_{\mathbf{k}\alpha} \gamma^j_{\mathbf{q}\delta}, \tag{2.25}$$

où l'on a défini les facteurs de cohérence

$$\begin{aligned} (\Gamma^{\alpha\delta}_{\mathbf{kq}})_{cc} &\equiv (u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}} + \sigma^3_{\alpha\alpha} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}} + \sigma^3_{\delta\delta} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{q}} + \sigma^3_{\alpha\alpha}\sigma^3_{\delta\delta} v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{q}}) \\ (\Gamma^{\alpha\delta}_{\mathbf{kq}})_{cv} &\equiv (v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}} - \sigma^3_{\alpha\alpha} u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}} + \sigma^3_{\delta\delta} v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{q}} - \sigma^3_{\alpha\alpha}\sigma^3_{\delta\delta} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{q}}) \\ (\Gamma^{\alpha\delta}_{\mathbf{kq}})_{vc} &\equiv (u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{q}} + \sigma^3_{\alpha\alpha} v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{q}} - \sigma^3_{\delta\delta} u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}} - \sigma^3_{\alpha\alpha}\sigma^3_{\delta\delta} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}}) \\ (\Gamma^{\alpha\delta}_{\mathbf{kq}})_{vv} &\equiv (v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{q}} - \sigma^3_{\alpha\alpha} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{q}} - \sigma^3_{\delta\delta} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}} + \sigma^3_{\alpha\alpha}\sigma^3_{\delta\delta} u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}}) \ . \end{aligned} \tag{2.26}$$

De façon similaire, soit $\tilde{H}_T = (1/N) \sum_{\mathbf{kq}\sigma\delta'} t^*_{\mathbf{kq}}\, d^\dagger_{\mathbf{q}\delta'} U^\dagger_{\delta'\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma}$ la partie de $\hat{H}_T$ qui apporte une contribution non-nulle à la moyenne thermique du commutateur dans l'équation (2.9). On trouve (voir annexe B)

$$\tilde{H}_T = (1/N) \sum^*_{\mathbf{kq}} \sum_{\sigma\delta'} \sum_{i,j \in \{c,v\}} t^*_{\mathbf{kq}} (\Gamma^{\sigma\delta'}_{\mathbf{kq}})_{ij} U^\dagger_{\delta'\sigma} \gamma^{j\dagger}_{\mathbf{q}\delta'} \gamma^i_{\mathbf{k}\sigma} \ . \tag{2.27}$$

En substituant (2.25) et (2.27) dans (2.9) on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_S(t) &= \frac{1}{N^2} \sum^*_{\mathbf{kq}} \sum_{\alpha\beta\delta} \sum_{\sigma\delta'} \mathrm{Im}\Bigg[-\frac{i}{\hbar} |t_{\mathbf{kq}}|^2 \vec{\sigma}_{\alpha\beta} U_{\beta\delta} U^*_{\sigma\delta'} \int dt' e^{-0^+(t-t')} \times \\ &\qquad \sum_{ij} (\Gamma^{\alpha\delta}_{\mathbf{kq}})_{ij} (\Gamma^{\sigma\delta'}_{\mathbf{kq}})_{ij} \big\langle \big[\gamma^{i\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}(t) \gamma^j_{\mathbf{q}\delta}(t), \gamma^{j\dagger}_{\mathbf{q}\delta'}(t') \gamma^i_{\mathbf{k}\sigma}(t') \big] \big\rangle_0 \Bigg] \\ &= \frac{1}{N^2} \sum^*_{\mathbf{kq}} \sum_{\alpha\beta\delta} \sum_{\sigma\delta'} \mathrm{Im}\Bigg[-\frac{i}{\hbar} |t_{\mathbf{kq}}|^2 \vec{\sigma}_{\alpha\beta} U_{\beta\delta} U^*_{\sigma\delta'} \int dt' e^{-0^+(t-t')} \times \\ &\sum_{ij} (\Gamma^{\alpha\delta}_{\mathbf{kq}})_{ij} (\Gamma^{\sigma\delta'}_{\mathbf{kq}})_{ij} \Big(\mathcal{G}^{i<}_{\mathbf{k}\sigma\alpha}(t',t) \mathcal{G}^{j>}_{\mathbf{q}\delta\delta'}(t,t') - \mathcal{G}^{i>}_{\mathbf{k}\sigma\alpha}(t',t) \mathcal{G}^{j<}_{\mathbf{q}\delta\delta'}(t,t') \Big) \Bigg] \end{aligned} \tag{2.28}$$

où $\mathcal{G}^{i<(>)}_{\mathbf{k}(\mathbf{q})}$ sont les fonctions de Green de Keldysh à gauche (droite) de la jonction. Leur définitions sont respectivement

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{i<}_{\mathbf{k},\alpha\beta}(t,t') &\equiv i\langle\gamma^{i\dagger}_{\mathbf{k}\beta}(t')\gamma^{i}_{\mathbf{k}\alpha}(t)\rangle_0 \ , \\ \mathcal{G}^{i>}_{\mathbf{k},\alpha\beta}(t,t') &\equiv -i\langle\gamma^{i}_{\mathbf{k}\alpha}(t)\gamma^{i\dagger}_{\mathbf{k}\beta}(t')\rangle_0 \ . \end{aligned} \tag{2.29}$$

Explicitement,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{i<}_{\mathbf{k}\alpha\beta}(t,t') &= if(E^i_{\mathbf{k}})e^{-iE^i_{\mathbf{k}}(t-t')/\hbar}\,\delta_{\alpha\beta} \ , \\ \mathcal{G}^{i>}_{\mathbf{k}\alpha\beta}(t,t') &= -i[1-f(E^i_{\mathbf{k}})]e^{-iE^i_{\mathbf{k}}(t-t')/\hbar}\,\delta_{\alpha\beta} \ , \end{aligned} \tag{2.30}$$

où f est la distribution de Fermi-Dirac.

Démonstration de (2.30). Dans la représentation d'interaction, on écrit

$$\gamma^i_{\mathbf{k}\alpha}(t) = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar}\gamma^i_{\mathbf{k}\alpha}e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \ , \tag{2.31}$$

où $\hat{H}_0 = \hat{H}_G$ est l'hamiltonien ODS de l'AF gauche. Soit $\{|n\rangle, E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, l'ensemble des états propres d'énergie de l'hamiltonien ODS (c'est la base diagonale où l'axe de quantification coïncide avec l'orientation du moment magnétique alterné) et soit l'opérateur identité $I = \sum_m |m\rangle\langle m|$ exprimé dans cette base, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{i<}_{\mathbf{k}\alpha\beta}(t,t') &= i\langle\gamma^{i\dagger}_{\mathbf{k}\beta}(t')\gamma^{i}_{\mathbf{k}\alpha}(t)\rangle_0 \\ &= i\sum_{n,m}\langle n|\rho_0 e^{i\hat{H}_0 t'/\hbar}\gamma^{\dagger}_{\mathbf{k}\beta}e^{-i\hat{H}_0 t'/\hbar}|m\rangle\langle m|e^{i\hat{H}_0 t/\hbar}\gamma_{\mathbf{k}\alpha}e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}|n\rangle \\ &= i\sum_{n,m}\langle n|\rho_0 e^{iE_n t'/\hbar}\gamma^{\dagger}_{\mathbf{k}\beta}e^{-iE_m t'/\hbar}|m\rangle\langle m|e^{iE_m t/\hbar}\gamma_{\mathbf{k}\alpha}e^{-iE_n t/\hbar}|n\rangle \ , \end{aligned} \tag{2.32}$$

où ρ_0 est la matrice densité sans interaction. Les exponentielles sont des scalaires et peuvent donc être factorisées à l'extérieur de la valeur moyenne :

$$\mathcal{G}^{i<}_{\mathbf{k}\alpha\beta}(t,t') = i\sum_{n,m}e^{-i(E_n-E_m)(t-t')/\hbar}\langle n|\rho_0\gamma^{\dagger}_{\mathbf{k}\beta}|m\rangle\langle m|\gamma_{\mathbf{k}\alpha}|n\rangle \ . \tag{2.33}$$

On aura $E_n - E_m = E^i_{\mathbf{k}}$ puisqu'il y a une quasiparticule de plus dans $|n\rangle$ que dans $|m\rangle$:

$$\mathcal{G}^{i<}_{\mathbf{k}\alpha\beta}(t,t') = i\sum_{n}e^{-iE^i_{\mathbf{k}}(t-t')/\hbar}\langle n|\rho_0\gamma^{\dagger}_{\mathbf{k}\beta}|m'\rangle\langle m'|\gamma_{\mathbf{k}\alpha}|n\rangle \tag{2.34}$$

où $|m'\rangle$ est le seul état connecté à $|n\rangle$ par $\gamma_{\mathbf{k}\alpha}$. On peut factoriser l'exponentielle à l'extérieur de la somme et réintroduire la somme sur les états intermédiaires :

$$\mathcal{G}^{i<}_{\mathbf{k}\alpha\beta}(t,t') = i\sum_n e^{-iE^i_{\mathbf{k}}(t-t')/\hbar}\langle\gamma^\dagger_{\mathbf{k}\beta}\gamma_{\mathbf{k}\alpha}\rangle \tag{2.35}$$

$$= if(E^i_{\mathbf{k}})e^{-iE^i_{\mathbf{k}}(t-t')/\hbar}\delta_{\alpha\beta}\ . \tag{2.36}$$

La fonction de Green de Keldysh $\mathcal{G}^{i>}_{\mathbf{k}\alpha\beta}(t,t')$ se calcule de façon analogue. □

L'équation (2.28) pour le courant de moment magnétique alterné à travers une jonction tunnel est générale. Une différence de potentiel électrique à travers la jonction pourrait être incluse, ce que nous ne ferons pas cependant, afin de ne pas avoir à considérer d'effet tunnel incohérent à une particule (à travers le gap antiferromagnétique). En intégrant sur $t-t'$ et en effectuant la somme sur les spins dans (2.28), on trouve

Proposition 4. *Le courant de moment magnétique alterné à travers la jonction tunnel est*

$$\mathbf{I}_S = I_c\,\hat{\mathbf{s}}_G \times \hat{\mathbf{s}}_D\ , \tag{2.37}$$

avec $\hat{\mathbf{s}}_{G(D)} = \mathbf{S}_{G(D)}/|\mathbf{S}_{G(D)}|$ *et*

$$I_c = \frac{8\Delta_G\Delta_D}{N^2}\mathrm{P}\sum_{kq}^{*}|t_{\mathbf{kq}}|^2\frac{f(E_{\mathbf{k}})-f(-E_{\mathbf{k}})}{E_{\mathbf{k}}(E^2_{\mathbf{k}}-E^2_{\mathbf{q}})} \tag{2.38}$$

où P *dénote la partie principale.*

Démonstration. La proposition découle de ce qui précède ainsi que des détails de calcul additionnels donnés à l'annexe C. Notons toutefois que le signe que l'on obtient par un calcul direct est contraire à celui qui apparaît à l'équation (2.37). Nous présentons à la section (2.2) des arguments en faveur de la validité du signe que nous proposons ici. □

Une expression similaire est obtenue pour le courant de spin dans le cas des jonctions tunnel ferromagnétiques. Remarquons que la fonction sinus présente dans l'effet Josephson standard est remplacée ici par un produit vectoriel, ce qui est une conséquence directe de la nature non-abélienne de la symétrie brisée par l'ordre antiferromagnétique à longue porté. Nous présentons, à l'annexe D, un calcul qui met en évidence l'origine géométrique de la dépendance du courant Josephson de spin (2.37) dans le produit vectoriel des deux moments.

Proposition 5. *Les équations du mouvement du système couplé constitué des deux paramètres d'ordre* $\mathbf{S}_G$ *et* $\mathbf{S}_D$ *sont*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}}_G &= I_c \,\hat{\mathbf{s}}_G \times \hat{\mathbf{s}}_D \ , \\ \dot{\mathbf{S}}_D &= I_c \,\hat{\mathbf{s}}_D \times \hat{\mathbf{s}}_G \ , \end{aligned} \tag{2.39}$$

où I_c *est donné par l'équation (2.38).*

Démonstration. Par symétrie, la dérivée temporelle $\dot{\mathbf{S}}_D$ du moment magnétique alterné de l'antiferroaimant droit s'obtient en interchangeant les indices G et D dans l'équation (2.37). Cela se vérifie aisément en retournant à l'équation (2.8). Il suffit en effet de faire les substitutions $c_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}} \to d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}}$ et $d_{\mathbf{q}} \to c_{\mathbf{k}}$. On peut ensuite additionner le vecteur d'onde antiferromagnétique $\mathbf{Q}$ à chaque vecteur d'onde dans la somme sur $\mathbf{k}$ et $\mathbf{q}$, ce qui équivaut à un réarrangement des termes de la somme. On trouve alors $d\mathbf{S}_D/dt = -d\mathbf{S}_G/dt$ en supposant $t_{\mathbf{k}+\mathbf{Q},\mathbf{q}+\mathbf{Q}} = t_{\mathbf{kq}}$. Finalement, l'expression (2.38) pour le courant critique I_c demeure inchangée. L'équation (C.6) de l'annexe C montre en effet que I_c est bien symétrique sous $\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{q}$. □

Le système d'équations (2.39) décrit un mouvement de précession : $\mathbf{S}_G$ précesse autour de $\mathbf{S}_D$ et vice-versa. Autrement dit, $\mathbf{S}_G$ et $\mathbf{S}_D$ précessent tous deux autour de leur somme $\mathbf{\Sigma} \equiv \mathbf{S}_L + \mathbf{S}_R$, laquelle est une constante du mouvement d'après (2.39).

Proposition 6. *La fréquence de précession de* $\mathbf{S}_G$ *et* $\mathbf{S}_D$ *autour de* $\mathbf{\Sigma} \equiv \mathbf{S}_G + \mathbf{S}_D$ *est*

$$\omega_0 = I_c \frac{|\mathbf{S}_G + \mathbf{S}_D|}{|\mathbf{S}_G||\mathbf{S}_D|} \ . \tag{2.40}$$

Démonstration. Ce résultat découle directement des équations de précession de $\mathbf{S}_G$ et $\mathbf{S}_D$ autour de $\mathbf{\Sigma}$:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{S}}_G &= I_c\, \hat{\mathbf{s}}_D \times \hat{\mathbf{s}}_G \\
&= \frac{I_c}{|\mathbf{S}_G||\mathbf{S}_D|}\mathbf{S}_D \times \mathbf{S}_G \\
&= \left[\frac{I_c}{|\mathbf{S}_G||\mathbf{S}_D|}(\mathbf{S}_G + \mathbf{S}_D)\right] \times \mathbf{S}_G
\end{aligned}$$

avec une expression similaire pour $\dot{\mathbf{S}}_D$. Maintenant, plus généralement, on montre sans difficulté que lorsqu'un vecteur $\vec{v}$ satisfait l'équation différentielle de précession $d\vec{v}/dt = -\vec{B} \times \vec{v}$, alors la fréquence de précession de $\vec{v}$ autour de $\vec{B}$ est donnée par le module $|\vec{B}|$. On n'a qu'à choisir un système de coordonnées dans lequel $\vec{B}$ est dans la direction $-\hat{z}$, $\vec{B} \equiv (0, 0, -B)$. Alors la composante v_z est une constante du mouvement. On pose $v_x = |\vec{v}| \cos(\omega_0 t)$ et $v_y = |\vec{v}| \sin(\omega_0 t)$, alors l'équation différentielle décrivant l'évolution de la composante de $\vec{v}$ selon $\hat{x}$ s'écrit

$$\begin{aligned}
dv_x/dt &= -Bv_y \\
-\omega_0|\vec{v}| \sin(\omega_0 t) &= -B|\vec{v}| \sin(\omega_0 t) \\
\omega_0 &= B = |\vec{B}| \; .
\end{aligned}$$

□

Dans le cas d'une jonction symétrique ($\Delta_G = \Delta_D \equiv \Delta$), les mêmes hypothèses et développements que Ref. [36] mènent au résultat analytique suivant

Proposition 7. *Dans le cas d'une jonction symétrique ($\Delta_G = \Delta_D \equiv \Delta$),*

$$I_c = \frac{h}{e^2} R^{-1} \Delta(T) \tanh(\tfrac{1}{2}\beta\Delta(T)) \; , \tag{2.41}$$

où $R = \hbar/\left(4\pi e^2 D^2 |t|^2\right)$ est la résistance de la jonction à température nulle dans l'état normal et D est la densité d'états (supposée constante).

Démonstration. Reprenons l'équation (2.38) en changeant les sommes sur $\mathbf{k}$ et $\mathbf{q}$ en intégrales sur $\epsilon_{\mathbf{k}}$ et $\epsilon_{\mathbf{q}}$ puis en prenant les densités d'états $D(\epsilon_{\mathbf{k}})$ et $D(\epsilon_{\mathbf{q}})$ égales à une constante D. En négligeant la dépendance en énergie des amplitudes tunnel ($|t_{\mathbf{kq}}|^2 \equiv |t|^2$), on obtient :

$$I_c = 8\Delta^2 D^2 |t|^2 \,\mathrm{P} \int d\epsilon_{\mathbf{k}} \int d\epsilon_{\mathbf{q}} \left(\frac{f(E_{\mathbf{k}}) - f(-E_{\mathbf{k}})}{E_{\mathbf{k}}(E_{\mathbf{k}}^2 - E_{\mathbf{q}}^2)} \right) . \tag{2.42}$$

Comme l'intégrand converge rapidement vers zéro, on peut raisonnablement étendre les bornes de l'intégrale double au-delà de la première zone de Brillouin magnétique, sur tout l'axe réel. Ceci nous permet de refermer le contour d'intégration dans le demi-plan supérieur comme à la Fig.2.2 et, ainsi, de transformer l'intégrale sur $\epsilon_{\mathbf{k}}$ en une somme sur les pôles de la fonction de Fermi. Puisque l'on doit prendre la partie principale, on contourne les deux pôles réels $\epsilon_{\mathbf{k}} = \pm\epsilon_{\mathbf{q}}$ en empruntant les demi-cercles $C1$ et $C2$.

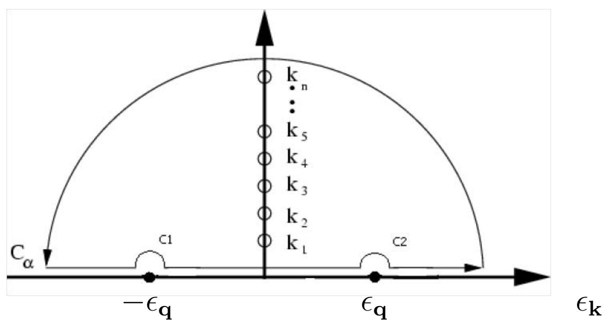

FIG. 2.1 – Contour d'intégration dans le demi-plan complexe supérieur utilisé lors de l'intégrale sur $\epsilon_{\mathbf{k}}$. Ici, les points $k_n = i\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}$ sont les pôles de la fonction de Fermi $f(E_{\mathbf{k}})$. Dans le cas d'une jonction symétrique ($\Delta_G = \Delta_D \equiv \Delta$), les demi-cercles $C1$ et $C2$ contournent les pôles réels de l'intégrand de (2.42) situés en $\epsilon_{\mathbf{k}} = \pm\epsilon_{\mathbf{q}}$.

La contribution provenant de l'intégrale le long des demi-cercles $C1$ et $C2$ s'évalue par le *théorème des résidues fractionnaires* et donne

$$\int_{C1} (...) \rightarrow -i\pi \mathrm{Res}\left[\frac{f(E_{\mathbf{k}}) - f(-E_{\mathbf{k}})}{E_{\mathbf{k}}(E_{\mathbf{k}}^2 - E_{\mathbf{q}}^2)}, \epsilon_{\mathbf{k}} = -\epsilon_{\mathbf{q}} \right] \tag{2.43}$$

$$\int_{C2} (...) \rightarrow -i\pi \mathrm{Res}\left[\frac{f(E_{\mathbf{k}}) - f(-E_{\mathbf{k}})}{E_{\mathbf{k}}(E_{\mathbf{k}}^2 - E_{\mathbf{q}}^2)}, \epsilon_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{q}} \right] . \tag{2.44}$$

On peut vérifier que ces deux contributions s'annullent mutuellement.

Les pôles de $f(E_{\mathbf{k}})$ et $f(-E_{\mathbf{k}})$ sont situés en $\epsilon_{\mathbf{k}} = i\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}$ où $\omega_n = (2n+1)\pi/\beta$ avec $\beta = 1/k_BT$ et $n \in \{0, \pm1, \pm2, ...\}$. Les résidus en ces pôles sont

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\left[f(E_{\mathbf{k}}), \epsilon_{\mathbf{k}} = i\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2}\right] &= \frac{-(\omega_n/\beta)}{\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2}}\\ \mathrm{Res}\left[f(-E_{\mathbf{k}}), \epsilon_{\mathbf{k}} = i\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2}\right] &= \frac{(\omega_n/\beta)}{\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2}}\ .\end{aligned} \tag{2.45}$$

L'expression pour le courant critique devient donc

$$\begin{aligned}I_c &= 8\Delta^2 D^2|t|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon_{\mathbf{q}} 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2(\omega_n/\beta)/\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2}}{(i\omega_n)(-\omega_n^2-\epsilon_{\mathbf{q}}^2-\Delta^2)}\\ &= \frac{32\pi\Delta^2D^2|t|^2}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\omega_n^2+\Delta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon_{\mathbf{q}} \frac{1}{\omega_n^2+\Delta^2+\epsilon_{\mathbf{q}}^2}\ .\end{aligned} \tag{2.46}$$

En utilisant

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_{\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{a}\ ,$$

on trouve

$$\begin{aligned}I_c &= \frac{32\pi^2\Delta^2D^2|t|^2}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2+\Delta^2}\\ &= 8\pi^2D^2|t|^2\Delta(T)\tanh\left(\tfrac{1}{2}\beta\Delta(T)\right).\end{aligned} \tag{2.47}$$

Avec la définition de la résistance de la jonction à température nulle dans l'état normal $R = \hbar/\left(4\pi e^2 D^2 |t|^2\right)$, on obtient l'équation (2.41). □

L'expression (2.41) pour la dépendance en température du courant critique a la même forme que celle obtenue par Ambegaokar et Baratoff [36] pour un supraconducteur BCS, ce qui n'est pas totalement surprenant étant données les analogies formelles entre, d'une part, l'hamiltonien BCS, son spectre d'énergie propre, son état fondamental et, d'autre part, les éléments correspondants du modèle champ moyen ODS [39].

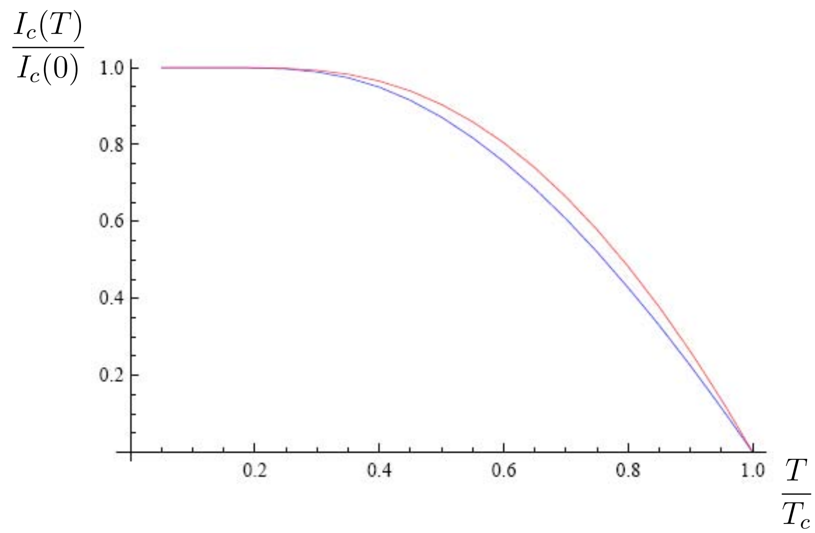

FIG. 2.2 – Comparaison entre la dépendance en température du courant critique donnée par l'expression exacte (2.38) (bleu) et celle donnée par l'approximation d'Ambegaokar & Baratoff Éq.(2.41) (rouge).

2.2 Discussion sur le signe dans l'expression (2.37) du courant de moment magnétique alterné

Comme il est indiqué dans la preuve de la proposition 4, le signe que l'on obtient par un calcul direct est contraire à celui qui apparaît dans l'expression (2.37). Ce signe contraire n'est pas celui auquel on s'attendrait si l'on suppose que l'effet Josephson généralisé découle de la tendance du système à uniformiser le paramètre d'ordre à travers la jonction. D'un point de vue à la Ginzburg-Landau, si telle était la véritable tendance du système, la fonctionnelle d'énergie libre contiendrait un terme de couplage d'échange de la forme $-J\mathbf{S}_G \cdot \mathbf{S}_D$ $(J > 0)$, qui rend énergétiquement favorable l'alignement des moments magnétiques alternés de part et d'autre de la jonction. L'équation d'Heisenberg mènerait alors à l'équation du mouvement $d\mathbf{S}_G/dt = -J\mathbf{S}_D \times \mathbf{S}_G$, qui a la même forme et le même signe que l'équation (2.37).

Dans l'ensemble de la littérature portant sur l'effet Josephson de spin dans les jonctions tunnel ferromagnétiques FM/I/FM (par exemple [25, 26, 27]), on présente le courant de spin comme le résultat d'un couplage d'échange entre les moments magnétiques de part et d'autre de la jonction. Cependant, l'auteur et le directeur de la présente thèse ont chacun reproduit ces calculs indépendamment et obtenu un signe contredisant cette hypothèse. Ceci semble d'ailleurs supporté par un calcul perturbatif au 2^e ordre en $\hat{H}_T$ de l'énergie de l'état fondamental d'une jonction FM/I/FM (voir annexe E). Ce calcul suggère en effet qu'il est énergétiquement favorable pour la jonction FM/I/FM d'adopter la configuration dans laquelle les moments magnétiques des deux FM sont anti-alignés (voir Fig.E.1 de l'annexe E).

La tâche consiste maintenant à expliquer physiquement ces résultats. Dans le cas d'une jonction FM/I/FM, il semble que l'anti-alignement des moments magnétiques résulte d'un couplage de *super-échange* à travers la jonction. En effet, l'hamiltonien tunnel $\hat{H}_T$ au deuxième ordre en théorie des perturbations permet d'échanger les électrons des deux FM par succession de deux sauts à travers la jonction. Or, il est bien connu que, dans le cas d'un modèle de Hubbard à deux sites (notés G et D) à demi-remplissage, le processus de super-échange mène à une description des états de basse énergie du système à l'aide d'un modèle d'Heisenberg *antiferromagnétique* $\hat{H}_{\text{eff}} = J\hat{\mathbf{S}}_G \cdot \hat{\mathbf{S}}_D$ où la constante J est positive et proportionnelle à $|t|^2$, le carré de l'amplitude de saut entre les deux sites [40, 41]. Cet argument est celui invoqué par Bruno & al. afin d'expliquer l'origine du courant tunnel de spin à travers une jonction FM/I/FM [23].

À première vue, cette explication pose toutefois problème dans le cas d'une jonction AF/I/AF. En effet, comme l'anti-alignement des moments magnétiques alternés de chaque AF implique que l'onde de densité de spin n'est pas uniforme à travers la jonction, cela signifie que les moments magnétiques locaux situés sur les sites immédiatement à gauche de la jonction sont alignés avec ceux des sites situés immédiatement à droite. L'effet de $\hat{H}_T$, au deuxième ordre en théorie des perturbations, résulterait donc en un couplage *ferromagnétique* à travers la jonction, contredisant ainsi l'argument donné au paragraphe précédent !

Cependant, cette contradiction n'est qu'apparente. En effet, il semble qu'elle découle d'une ambiguïté dans la définition du point d'origine du réseau direct dans la définition des opérateurs de moment magnétique alterné $\hat{\mathbf{S}}_G$ et $\hat{\mathbf{S}}_D$:

$$\hat{\mathbf{S}}_G \equiv \frac{\hbar}{2} \sum_{\mathbf{r}_i \in G} \sum_{\alpha\beta} e^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}_i} c^\dagger_{i\alpha} \vec{\sigma}_{\alpha\beta} c_{i\beta} \ , \tag{2.48}$$

$$\hat{\mathbf{S}}_D \equiv \frac{\hbar}{2} \sum_{\mathbf{r}_j \in D} \sum_{\alpha\beta} e^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}_j} d^\dagger_{j\alpha} \vec{\sigma}_{\alpha\beta} d_{j\beta} \ , \tag{2.49}$$

où $\mathbf{r}_i \in G$ signifie que l'on somme sur les sites à gauche de la jonction tunnel (et $\mathbf{r}_j \in D$ est défini similairement). Pour voir cela le plus simplement possible, considérons un système en 1D et supposons que l'origine dans la somme sur $\mathbf{r}_i \in G$ est le premier site à gauche de la barrière tunnel. Maintenant, remarquons que dans tous les calculs qui ont précédé, $\hat{\mathbf{S}}_G$ et $\hat{\mathbf{S}}_D$ sont traités de façon identique. Plus précisément $\hat{\mathbf{S}}_D$ s'obtient à partir de $\hat{\mathbf{S}}_G$ et vice versa sous $c_{\mathbf{k}\sigma} \leftrightarrow d_{\mathbf{q}\sigma}$ comme en témoignent les transformées de Fourier que nous avons utilisées :

$$\hat{\mathbf{S}}_G = \frac{\hbar}{2} \sum_{\mathbf{k},\alpha\beta} c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q},\alpha} \vec{\sigma}_{\alpha\beta} c_{\mathbf{k},\beta} \ , \tag{2.50}$$

$$\hat{\mathbf{S}}_D = \frac{\hbar}{2} \sum_{\mathbf{q},\alpha\beta} d^\dagger_{\mathbf{q}+\mathbf{Q},\alpha} \vec{\sigma}_{\alpha\beta} d_{\mathbf{q},\beta} \ . \tag{2.51}$$

Autrement dit, nous avons considéré $\hat{\mathbf{S}}_D$ comme une image miroir de $\hat{\mathbf{S}}_G$, ce qui signifie que nous avons à notre insu supposé que l'origine dans la somme sur $\mathbf{r}_j \in D$ était le premier site à droite de la barrière tunnel (ou tout autre site du même sous-réseau). Or, si nous souhaitons considérer le système AF/I/AF dans sa totalité afin de déterminer si l'onde de densité de spin est uniforme ou non à travers la jonction, il est nécessaire d'éliminer cette duplicité de l'origine afin de n'en choisir qu'une seule. Il est possible de remédier à cela en remplaçant partout le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{s}}_D$ par $-\hat{\mathbf{s}}_D$.

Une autre façon de voir cela est de dire que si l'on désire mesurer l'uniformité de l'onde de densité de spin à travers la jonction, il est nécessaire de définir un réseau bipartite pour le système entier, de sorte que le premier site à gauche et le premier site à droite n'appartiennent pas au même sous-réseau. Il est possible d'introduire ce fait dans notre formalisme en définissant le paramètre d'ordre dans l'hamiltonien ODS de l'AF gauche avec un signe différent de celui dans l'hamiltonien ODS de l'AF droit.

De ce point de vue, nous pouvons alors écrire que le courant de moment magnétique alterné à travers la jonction est

$$\mathbf{I}_S = -I_c \hat{\mathbf{s}}_D \times \hat{\mathbf{s}}_G \; . \tag{2.52}$$

Ainsi, dans le cas d'une jonction AF/I/AF, l'effet Josephson généralisé a réellement pour conséquence d'uniformiser le paramètre d'ordre à travers le système. Ceci est tout-à-fait raisonnable, étant donné que l'on peut appliquer l'argument du super-échange au système réduit composé seulement du premier site à gauche et du premier site à droite et qu'ainsi l'anti-alignement de leur moments locaux respectifs devrait être favorisé.

2.3 Détection expérimentale

Dans le cas d'une jonction FM/I/FM, la précession des moments magnétiques résultant du couplage tunnel devrait être détectable au moyen d'une expérience de résonnance magnétique standard. Plus précisément, en soumettant le système à un champ magnétique rf transverse à l'axe de précession et oscillant à la fréquence ω_0 de l'équation (2.40), il devrait être possible d'observer une absorbtion résonnante. À notre connaissance, cette possibilité n'a pas été évoquée dans la littérature.

En ce qui concerne les jonctions AF/I/AF, une telle expérience de résonnance magnétique serait vaine en raison de l'absence de moment magnétique net. L'idée d'utiliser le phénomène de résonnance antiferromagnétique, bien qu'intéressante *a priori*, doit aussi être abandonnée. En effet, la théorie de la résonnance antiferromagnétique [42] recquiert la présence d'un champ d'anistropie de spin $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_x, \Lambda_y, \Lambda_z)$, résultant de l'interaction spin-orbite, dont l'hamiltonien général peut s'écrire sous la forme [43] :

$$\begin{aligned}\hat{H}_\Lambda = -\lambda^2 \bigg\{ & \frac{1}{3}(\Lambda_x + \Lambda_y + \Lambda_z) S(S+1) \\ & + \frac{1}{3}\left[\Lambda_z - \frac{1}{2}(\Lambda_x + \Lambda_y)\right]\left[3\hat{S}_z^2 - S(S+1)\right] \\ & + \frac{1}{2}(\Lambda_x - \Lambda_y)(\hat{S}_x^2 - \hat{S}_y^2)\bigg\}\end{aligned} \tag{2.53}$$

où λ est la constante de couplage spin-orbite et où $\hat{S}_i$ est l'opérateur de spin selon $\hat{\mathbf{i}}$ (et non l'opérateur de moment magnétique alterné). En choisissant $\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda\hat{\mathbf{z}}$, cet hamiltonien devient

$$\hat{H}_\Lambda = D\hat{S}_z^2 \ , \tag{2.54}$$

où l'on a omis un terme constant. Pour un système de spin 1/2, comme celui qui nous intéresse, $\hat{S}_x$ et $\hat{S}_y$ commutent tous deux avec $\hat{H}_\Lambda$, ce qui implique que le phénomène de résonnance antiferromagnétique ne peut pas se produire. Néanmoins, il est intéressant d'étudier les conséquences que l'effet Josephson de spin aurait sur les fréquences de résonnance antiferromagnétique de chacun des deux AF dans le cas où ces derniers seraient composés de particules de spin $S > 1/2$. Nous explorons cette avenue à l'annexe F.

Une alternative intéressante est de considérer une jonction tunnel AF/I/FM, où FM dénote un ferroaimant itinérant (voir figure 2.3a). Le ferromagnétisme itinérant peut être décrit dans le cadre simple du modèle champ moyen de Stoner :

$$\hat{H}_{\text{Stoner}} = \begin{pmatrix} d_{\mathbf{q}\uparrow}^\dagger & d_{\mathbf{q}\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{\mathbf{q}} - h & 0 \\ 0 & \xi_{\mathbf{q}} + h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{\mathbf{q}\uparrow} \\ d_{\mathbf{q}\downarrow} \end{pmatrix} \ , \tag{2.55}$$

où $\xi_{\mathbf{q}} = \epsilon_{\mathbf{q}} - \mu$ et h est un champ moléculaire. Dans (2.55), l'axe de quantification de spin est dans la direction du moment magnétique $\mathbf{M}$ du FM. En procédant de la même façon que dans le cas d'une jonction AF/I/AF (section 2.1), on peut montrer que

$$\dot{\mathbf{S}}_G = \mathcal{I}_c \mathbf{M}_D \times \mathbf{S}_G \ , \tag{2.56}$$

$$\dot{\mathbf{M}}_D = \mathcal{I}_c \mathbf{S}_G \times \mathbf{M}_D \ , \tag{2.57}$$

où

$$\mathcal{I}_c = \frac{1}{N^2}\mathrm{P}\sum_{\mathbf{k}}^{*}\sum_{\mathbf{q}}|t_{\mathbf{kq}}|^2\frac{\Delta_G}{E_{\mathbf{k}}}\left\{\frac{f(\xi_{\mathbf{q}}-h)-f(E_{\mathbf{k}})}{\xi_{\mathbf{q}}-h-E_{\mathbf{k}}}-\frac{f(\xi_{\mathbf{q}}-h)-f(-E_{\mathbf{k}})}{\xi_{\mathbf{q}}-h+E_{\mathbf{k}}}\right. \\ \left.-\frac{f(\xi_{\mathbf{q}}+h)-f(E_{\mathbf{k}})}{\xi_{\mathbf{q}}+h-E_{\mathbf{k}}}+\frac{f(\xi_{\mathbf{q}}+h)-f(-E_{\mathbf{k}})}{\xi_{\mathbf{q}}+h+E_{\mathbf{k}}}\right\}. \tag{2.58}$$

Ceci signifie donc que $\mathbf{S}_G$ et $\mathbf{M}_D$ précessent l'un par rapport à l'autre et compte tenu du moment magnétique net du FM, ceci devrait pouvoir être détecté par résonnance magnétique. Or, si l'on ajoute un second AF à gauche du précédent (comme à la figure 2.3b), l'effet Josephson de spin entre les deux AF devrait compliquer substantiellement la dynamique du moment magnétique du FM et par conséquent affecter la résonnance magnétique. Ceci constituerait donc une signature empirique de l'existence d'un effet Josephson de spin entre les deux AF.

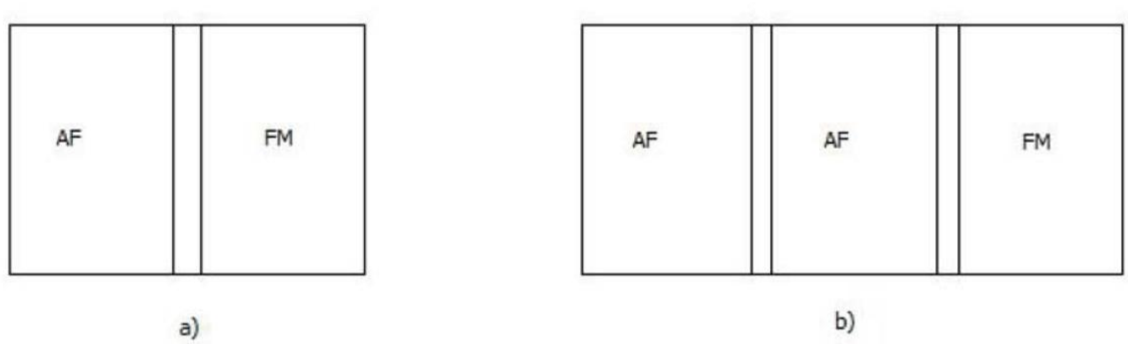

FIG. 2.3 – a) Configuration AF/I/FM : la précession du moment magnétique du FM devrait être observable par résonnance magnétique. b) Configuration AF/I/AF/I/FM : l'effet Josephson de spin entre les deux AF devrait affecter la résonnance magnétique du FM.

Chapitre 3

Effet Josephson AC de spin dans une jonction tunnel AF/I/AF

Dans l'effet Josephson ordinaire, le champ de jauge électromagnétique entre directement dans l'argument de la fonction sinus. Le cas présent est différent. Chaque moment magnétique de spin est couplé au champ magnétique $\mathbf{B}$ à travers le terme de Zeeman

$$\hat{H}_Z = -g\mu_B \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{M}}$$

où g est le rapport gyromagnétique, μ_B le magnéton de Bohr et $\hat{\mathbf{M}} = \frac{\hbar}{2} \sum_{\mathbf{k}\alpha\beta} c^\dagger_{\mathbf{k}\alpha} \vec{\sigma}_{\alpha\beta} c_{\mathbf{k}\beta}$ est l'opérateur de moment magnétique uniforme (dans un isolant, on peut négliger les termes provenant du mouvement orbital).

Proposition 8. *Soit $\mathbf{B}_G$ et $\mathbf{B}_D$ les champs magnétiques appliqués à gauche et à droite de la jonction respectivement. Alors les équations du mouvement du système couplé constitué des paramètres d'ordre $\mathbf{S}_G$ et $\mathbf{S}_D$ sont :*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}}_G &= -g\mu_B \mathbf{B}_G \times \mathbf{S}_G - I_c\, \hat{\mathbf{s}}_D \times \hat{\mathbf{s}}_G, \\ \dot{\mathbf{S}}_D &= -g\mu_B \mathbf{B}_D \times \mathbf{S}_D - I_c\, \hat{\mathbf{s}}_G \times \hat{\mathbf{s}}_D \,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Remarque 9. *Au chapitre précédent, nous avons calculé (au deuxième ordre en $\hat{H}_T$ en théorie des perturbations) que le courant Josephson DC de spin à travers la jonction est donné par l'expression $\mathbf{I}_S \equiv \dot{\mathbf{S}}_G = I_c \hat{\mathbf{s}}_D \times \hat{\mathbf{s}}_D$. De là, on peut conclure que l'hamiltonien effectif de la jonction doit comporter un terme de couplage (tunnel) de la forme $\tilde{I}_c \mathbf{S}_G \cdot \mathbf{S}_D$ où $\tilde{I}_c \equiv I_c/(|\mathbf{S}_G||\mathbf{S}_D|)$; en effet, l'équation du mouvement d'Heisenberg pour $\mathbf{S}_G$ redonnerait alors l'expression du courant de spin.*

Si, en présence d'un champ magnétique externe, nous pouvions toujours écrire l'hamiltonien effectif de la jonction en incluant le terme de couplage tunnel mentionné précédemment, mais en y rajoutant cette-fois le terme de Zeeman, alors l'équation d'Heisenberg pour $\mathbf{S}_G$ donnerait immédiatement (3.1) et l'énoncé du théorème (8) serait trivial.

Or, il n'est pas clair, a priori*, que le calcul perturbatif du chapitre précédent demeure valide en présence d'un champ magnétique externe. C'est pourquoi la nécessité de démontrer cette proposition s'impose.*

Démonstration de la proposition 8. Le premier terme à droite de l'égalité est simplement la contribution de $\hat{H}_Z$ à l'équation du mouvement d'Heisenberg. Le second terme est la contribution de l'hamiltonien tunnel $\hat{H}_T$ et a exactement la même forme que celui déjà obtenu en l'absence de champ magnétique, soit les équations (2.37) et (2.38). Afin de clarifier ce dernier point, récrivons l'équation (2.9) :

$$\left\langle c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}(t) d_{\mathbf{q}\delta}(t) \right\rangle = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{t} dt' e^{-0^+(t-t')} \left\langle \left[c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}(t) d_{\mathbf{q}\delta}(t), \hat{H}_T(t') \right] \right\rangle_0 . \tag{3.2}$$

Ici, les seuls termes de $\hat{H}_T(t')$ qui donnent une contribution non-nulle à la moyenne du commutateur sont de la forme

$$d^\dagger_{\mathbf{q}\delta'}(t') U^\dagger_{\delta'\sigma'}(t') c_{\mathbf{k}\sigma'}(t') . \tag{3.3}$$

Contrairement au cas en l'absence de champ magnétique, la difficulté tient ici à la présence de $U^\dagger_{\delta'\sigma'}(t')$ dans l'intégrale sur t'. Nous allons décrire, dans ce qui suit, une procédure permettant d'extraire la transformation unitaire à l'extérieure de l'intégrale.

Puisque les opérateurs de création et d'annihilation dans (3.3) sont dans la représentation d'interaction (où $\hat{H}_T$ est l'interaction) et que $\hat{H}_0$ commute avec $\hat{H}_Z$, il est possible de factoriser l'évolution temporelle due à $\hat{H}_Z$ et d'écrire

$$d^{\dagger}_{\mathbf{q}\delta'}(t') = d^{0\dagger}_{\mathbf{q}\bar{\delta}}(t')\Lambda^{D\dagger}_{\bar{\delta}\delta'}(t') \ , \tag{3.4}$$

$$c_{\mathbf{k}\sigma'}(t') = \Lambda^{G}_{\sigma'\bar{\sigma}}(t')c^{0}_{\mathbf{k}\bar{\sigma}}(t') \tag{3.5}$$

où

$$\Lambda^{G(D)}_{\sigma'\bar{\sigma}}(t') = \left(\mathrm{e}^{ig\mu_B \mathbf{B}_{G(D)}\cdot\vec{\sigma}t'/2}\right)_{\sigma'\bar{\sigma}} \ , \tag{3.6}$$

$$d^{0\dagger}_{\mathbf{q}\bar{\delta}}(t') = e^{i\hat{H}_0 t'/\hbar} d^{\dagger}_{\mathbf{q}\bar{\delta}} e^{-i\hat{H}_0 t'/\hbar} \ , \tag{3.7}$$

$$c^{0}_{\mathbf{k}\bar{\sigma}}(t') = e^{i\hat{H}_0 t'/\hbar} c_{\mathbf{k}\bar{\sigma}} e^{-i\hat{H}_0 t'/\hbar} \tag{3.8}$$

et δ', σ' dénotent un état de spin $\uparrow$ ou $\downarrow$ dans la direction de l'axe de quantification au temps t', alors que $\bar{\delta}, \bar{\sigma}$ dénotent un état de spin $\uparrow$ ou $\downarrow$ dans la direction de l'axe de quantification au temps 0 . Rappelons que l'axe de quantification du spin est toujours défini dans la direction de l'aimantation alternée, ce qui implique que, sous l'action de $\hat{H}_Z$, l'axe au temps t' a été tourné par rapport à celui au temps 0. L'exposant 0 des opérateurs fermioniques indique que ceux-ci évoluent avec $\hat{H}_0$.

Les relations (3.4) et (3.5) découlent de la relation de Hausdorff[1]. Afin de voir cela, récrivons d'abord $c_{\mathbf{k}\sigma'}(t')$ comme suit :

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{k}\sigma'}(t') &= e^{i(\hat{H}_0+\hat{H}_Z)t'/\hbar} c_{\mathbf{k}\bar{\sigma}} e^{-i(\hat{H}_0+\hat{H}_Z)t'/\hbar} \\ &= e^{i\hat{H}_0 t'/\hbar}\left(e^{i\hat{H}_Z t'/\hbar} c_{\mathbf{k}\bar{\sigma}} e^{-i\hat{H}_Z t'/\hbar}\right) e^{-i\hat{H}_0 t'/\hbar} \ , \end{aligned}$$

où la seconde égalité découle de la relation $[\hat{H}_0, \hat{H}_Z] = 0$, laquelle n'est valide qu'avant la factorisation champ moyen de $\hat{H}_0$. À présent, en utilisant la relation de Hausdorff afin

[1] Soient A et B, deux opérateurs. Alors $e^{-A}Be^{A} = B + [B,A] + \frac{1}{2!}[[B,A],A] + \frac{1}{3!}[[[B,A],A],A] + ...$

de récrire le terme entre parenthèses[2], on obtient :

$$c_{\mathbf{k}\sigma'}(t') = e^{i\hat{H}_0 t'/\hbar}\left(e^{ig\mu_B \vec{B}_G\cdot\vec{\sigma}t'/2}\right)_{\sigma'\bar{\sigma}} c_{\mathbf{k}\bar{\sigma}} e^{-i\hat{H}_0 t'/\hbar} \tag{3.9}$$

$$= \left(e^{ig\mu_B \vec{B}_G\cdot\vec{\sigma}t'/2}\right)_{\sigma'\bar{\sigma}} c^0_{\mathbf{k}\bar{\sigma}}(t') \ , \tag{3.10}$$

d'où les relations (3.4) et (3.5). Maintenant, on peut écrire (3.10) comme suit

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{k}\sigma'}(t') &= \left(e^{ig\mu_B \vec{B}_G\cdot\vec{\sigma}(t'-t)/2}\right)_{\sigma'\sigma}\left(e^{ig\mu_B \vec{B}_G\cdot\vec{\sigma}t/2}\right)_{\sigma\bar{\sigma}} c^0_{\mathbf{k}\bar{\sigma}}(t') \\ &= \left(e^{ig\mu_B \vec{B}_G\cdot\vec{\sigma}(t'-t)/2}\right)_{\sigma'\sigma} c^t_{\mathbf{k}\sigma}(t') \\ &= \Lambda^G_{\sigma'\sigma}(t'-t) c^t_{\mathbf{k}\sigma}(t') \ , \end{aligned} \tag{3.11}$$

où σ est un état de spin dans la direction de l'axe de quantification au temps t et on a remplacé l'exposant 0 de l'opérateur d'annihilation par l'exposant t afin d'indiquer que son état de spin est non plus au temps 0, mais au temps t.

D'autre part, on peut relier $U^\dagger_{\delta'\sigma'}(t')$ à $U^\dagger_{\delta\sigma}(t)$ en procédant comme suit. D'abord, on écrit[3]

$$c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma'}(t') U_{\sigma'\delta'}(t') = \tilde{c}^\dagger_{\mathbf{k}\delta'}(t') \ , \tag{3.12}$$

ce qui s'obtient en multipliant (1.42) à droite par U (ici, on a ajouté le symbole ˜, comme à la section 1.4, afin d'indiquer que l'on passe de la base de spin de gauche à celle de droite). En utilisant le conjugué complexe de (3.11), le terme de droite dans (3.12) peut se récrire comme

$$... = \tilde{c}^{t\dagger}_{\mathbf{k}\delta}(t') \Lambda^{D\dagger}_{\delta\delta'}(t'-t) \ . \tag{3.13}$$

À présent, on récrit $\tilde{c}^{t\dagger}_{\mathbf{k}\delta}(t')$ dans la base de spin de gauche (au temps t) :

$$... = c^{t\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}(t') U_{\sigma\delta}(t) \Lambda^{D\dagger}_{\delta\delta'}(t'-t) \tag{3.14}$$

[2]En prenant $A = -i\hat{H}_Z(t'-t)/\hbar$ et $B = c_{\mathbf{k}\sigma'}$ dans la relation de Hausdorff énoncée à la note de bas de page précédente

[3]Dans ce qui suit, δ et δ' dénotent un état de spin $\uparrow$ ou $\downarrow$ dans la direction de l'axe de quantification de spin de l'AF droit au temps t et t' respectivement, alors que σ et σ' tiennent le même rôle dans l'AF gauche. La somme sur les indices répétés de spin est implicite.

et on introduit l'opérateur identité entre $c^{t\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}(t')$ et $U_{\sigma\delta}(t)$ dans l'expression qui précède :

$$... = c^{t\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}(t')\Lambda^{G\dagger}_{\alpha\sigma'}(t'-t)\Lambda^{G}_{\sigma'\sigma}(t'-t)U_{\sigma\delta}(t)\Lambda^{D\dagger}_{\delta\delta'}(t'-t) \; . \tag{3.15}$$

À nouveau, on utilise le conjugué complexe de (3.11) afin de récrire l'opérateur fermionique. On obtient ainsi

$$... = c^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma'}(t')\Big(\Lambda^{G}_{\sigma'\sigma}(t'-t)U_{\sigma\delta}(t)\Lambda^{D\dagger}_{\delta\delta'}(t'-t)\Big) \; . \tag{3.16}$$

En comparant (3.16) avec le membre de gauche dans (3.12), on déduit alors

$$U^{\dagger}_{\delta'\sigma'}(t') = \Lambda^{D}_{\delta'\delta}(t'-t)U^{\dagger}_{\delta\sigma}(t)\Lambda^{G\dagger}_{\sigma\sigma'}(t'-t) \; . \tag{3.17}$$

Par conséquent, en substituant (3.11) et (3.17) dans (3.3), on obtient

$$d^{\dagger}_{\mathbf{q}\delta'}(t')U^{\dagger}_{\delta'\sigma'}(t')c_{\mathbf{k}\sigma'}(t') = d^{t\dagger}_{\mathbf{q}\delta}(t')U^{\dagger}_{\delta\sigma}(t)c^{t}_{\mathbf{k}\sigma}(t') \; , \tag{3.18}$$

où les indices de spin (à droite de l'égalité) sont tous au temps t. Il est maintenant possible de factoriser la transformation unitaire $U^{\dagger}_{\delta\sigma}(t)$ à l'extérieur de l'intégrale sur t', de sorte que la suite du calcul est identique au cas sans champ magnétique, d'où l'équation (3.1). Plus précisément, on retrouve le produit vectoriel (au temps t) des deux moments. Ceci nous indique que les valeurs antérieures du champ de jauge n'affectent pas la dynamique du système à l'instant t (absence d'hystérésis) et que seule sa valeur actuelle importe. $\square$

L'argument qui précède demeure valide dans le cas général où le rapport gyromagnétique est anisotrope. Le terme de Zeeman s'écrit alors

$$\hat{H}'_Z = -g_{||}\mu_B\big(B_x\hat{M}_x + B_y\hat{M}_y\big) - g_{\perp}\mu_B B_z\hat{M}_z \; .$$

En récrivant $\hat{H}'_Z$ de la façon suivante

$$\hat{H}'_Z = -\mu_B \mathfrak{B}\cdot\hat{\mathbf{M}}$$

avec $\mathfrak{B} \equiv (g_{||}B_x, g_{||}B_y, g_{\perp}B_z)$, il apparaît alors clairement qu'aucune modification n'est requise dans le raisonnement précédant à condition de faire la substitution

$$\Lambda^{G(D)}_{\sigma'\sigma} = \Big(\mathrm{e}^{ig\mu_B\mathbf{B}_{G(D)}\cdot\vec{\sigma}(t'-t)/\hbar}\Big)_{\sigma'\sigma} \longrightarrow \Big(\mathrm{e}^{i\mu_B\mathfrak{B}_{G(D)}\cdot\vec{\sigma}(t'-t)/\hbar}\Big)_{\sigma'\sigma} \; .$$

Les équations du mouvement générales s'écrivent donc :

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{S}}_G &= -\mu_B \mathfrak{B}_G \times \mathbf{S}_G + I_c\, \hat{\mathbf{s}}_D \times \hat{\mathbf{s}}_G, \\
\dot{\mathbf{S}}_D &= -\mu_B \mathfrak{B}_D \times \mathbf{S}_D + I_c\, \hat{\mathbf{s}}_G \times \hat{\mathbf{s}}_D \ .
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Si $\mathbf{B}_G = \mathbf{B}_D = \mathbf{B}$, l'équation (3.1) implique que dans le référentiel tournant $\hat{\mathbf{u}} = \{\hat{\mathbf{x}}', \hat{\mathbf{y}}', \hat{\mathbf{z}}'\}$ défini par $d\hat{\mathbf{u}}/dt = -g\mu_B \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{u}}$, $\mathbf{S}_G$ et $\mathbf{S}_D$ précessent par rapport à leur somme (constante) $\mathbf{\Sigma} \equiv \mathbf{S}_G + \mathbf{S}_D$ à la fréquence ω_0 donnée à l'équation (2.40). Lorsque l'on retourne au référentiel statique, l'équation (3.1) donne $d\mathbf{\Sigma}/dt = -g\mu_B \mathbf{B} \times \mathbf{\Sigma}$ de sorte que $\mathbf{S}_G$ et $\mathbf{S}_D$ suivent un mouvement de double précession.

Dans l'effet Josephson ordinaire, une différence de potentiel électrique constante induit dans la différence de phase φ une dépendance linéaire en temps ($\dot{\varphi} = 2eV/\hbar$). Dans le cas présent, une relation analogue existe pour l'orientation relative θ entre $\mathbf{S}_G$ et $\mathbf{S}_D$ en présence d'une différence de champ magnétique $\delta\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}_G - \mathbf{B}_D$.

Proposition 10. *En présence d'une différence de champ magnétique $\delta\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}_G - \mathbf{B}_D$ à travers la jonction tunnel, l'orientation relative θ entre $\mathbf{S}_G$ et $\mathbf{S}_D$ respecte la relation*

$$
\dot{\theta}(t) = -g\mu_B \delta\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}(t),
\tag{3.20}
$$

où $\hat{\mathbf{e}}(t) \equiv \hat{\mathbf{s}}_G(t) \times \hat{\mathbf{s}}_D(t)$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'équation (3.1) afin de calculer $d(\cos\theta)/dt = d(\hat{\mathbf{s}}_G \cdot \hat{\mathbf{s}}_D)/dt$. On obtient

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\cos\theta &= \frac{d}{dt}(\hat{\mathbf{s}}_G \cdot \hat{\mathbf{s}}_D) && (3.21)\\
&= \left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{s}}_G\right) \cdot \hat{\mathbf{s}}_D + \hat{\mathbf{s}}_G \cdot \left(\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{s}}_D\right) && (3.22)\\
&= (-g\mu_B \mathbf{B}_G \times \hat{\mathbf{s}}_G + \frac{I_c}{S}\, \hat{\mathbf{s}}_D \times \hat{\mathbf{s}}_G) \cdot \hat{\mathbf{s}}_D + \hat{\mathbf{s}}_G \cdot (-g\mu_B \mathbf{B}_D \times \hat{\mathbf{s}}_D + \frac{I_c}{S}\, \hat{\mathbf{s}}_G \times \hat{\mathbf{s}}_D) && (3.23)\\
&= -g\mu_B (\mathbf{B}_G \times \hat{\mathbf{s}}_G) \cdot \hat{\mathbf{s}}_D + 0 - g\mu_B \hat{\mathbf{s}}_G \cdot (\mathbf{B}_D \times \hat{\mathbf{s}}_D) + 0 && (3.24)\\
&= -g\mu_B (\mathbf{B}_G - \mathbf{B}_D) \cdot (\hat{\mathbf{s}}_G \times \hat{\mathbf{s}}_D)\ , && (3.25)
\end{aligned}
$$

où l'on a utilisé la propriété de cyclicité $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ pour obtenir la dernière égalité. $\square$

Contrairement à l'effet Josephson ordinaire, cette équation est non-linéaire. En la solutionnant numériquement dans le cas où le champ magnétique s'annule d'un côté de la jonction, on trouve que le comportement de l'angle entre $\mathbf{S}_L$ et $\mathbf{S}_R$ est semblable à une fonction sinusoïdale du temps. La présence additionnelle d'un champ constant à travers le système ajoute un battement à ce comportement sinusoïdale. Des résultats numériques illustrant ces deux types de situation sont présentés aux figures 3.1 et 3.2. Notons par ailleurs que la valeur du rapport gyromagnétique apparaissant dans la relation (3.20) peut varier d'un matériau à l'autre. À l'opposé, l'effet Josephson ordinaire ne fait intervenir que des constantes universelles.

Remarquons pour terminer que la précédente discussion de l'effet AC peut être transposée au cas des jonctions ferromagnétiques en remplaçant le moment magnétique alterné par le moment magnétique uniforme. Mentionnons aussi que malgré la publication de plusieurs articles sur l'effet Josephson de spin dans les jonctions ferromagnétiques [23, 25, 26, 27], ce résultat n'est pas paru auparavant dans la litérature.

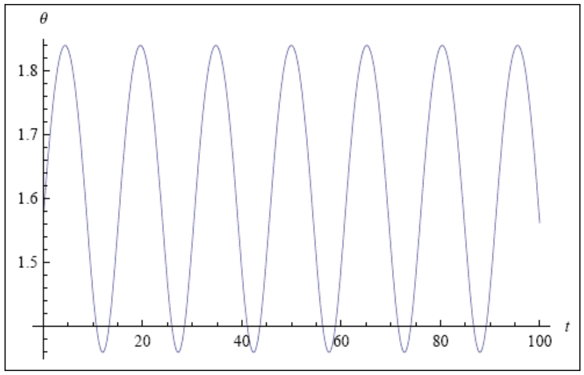

FIG. 3.1 – Évolution temporelle de l'angle $\theta(t)$ entre $\mathbf{S}_G$ et $\mathbf{S}_D$ dans le cas où le champ magnétique s'annule d'un côté de la jonction tunnel. Ici, $|\mathbf{S}_G| = |\mathbf{S}_D| = S$, $g\mu_B\mathbf{B}_G = 0$, $g\mu_B\mathbf{B}_D = 0.1\hat{x}$ et $I_c/S = 0.3$. Les conditions initiales sont $\mathbf{S}_G(t=0) = S\,\hat{z}$ et $\mathbf{S}_D(t=0) = S\,\hat{y}$. On remarque que le comportement de $\theta(t)$ est semblable à une fonction sinusoïdale.

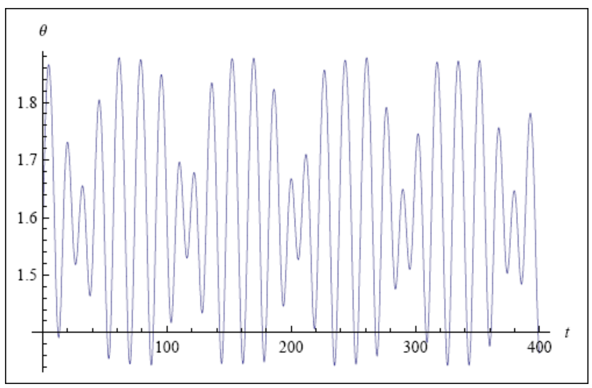

FIG. 3.2 – Évolution temporelle de l'angle $\theta(t)$ entre $\mathbf{S}_G$ et $\mathbf{S}_D$ lorsqu'on ajoute un champ magnétique uniforme (à travers la jonction) aux paramètres de la Fig.3.1. Ici, donc, $|\mathbf{S}_G| = |\mathbf{S}_D| = S$, $g\mu_B\mathbf{B}_G = 0.05\,\hat{z}$, $g\mu_B\mathbf{B}_D = 0.1\,\hat{x} + 0.05\,\hat{z}$ et $I_c/S = 0.3$. Les conditions initiales sont $\mathbf{S}_G(t=0) = S\,\hat{z}$ et $\mathbf{S}_D(t=0) = S\,\hat{y}$. On remarque qu'un battement s'ajoute par rapport au comportement sinusoïdal de la Fig.3.1.

Chapitre 4

Au-delà de la réponse linéaire

Dans l'ensemble de la littérature portant sur l'effet Josephson de spin dans les jonctions FM/I/FM (où I dénote une mince couche isolante), l'expression pour le courant de spin est généralement obtenue dans l'approximation de la réponse linéaire. Il en va de même de l'expression que nous avons obtenue précédemment pour le courant Josephson de moment magnétique alterné dans une jonction AF/I/AF. Or, il est bien connu que le résultat de Kulik & Omel'yanchuk [44] pour le courant Josephson dans la limite d'une faible barrière tunnel diffère considérablement du résultat d'Ambegaokar & Baratoff [36].

Dans ce chapitre, nous allons étudier le courant Josephson de moment magnétique alterné à travers une jonction AF/I/AF au-delà de l'approximation de la réponse linéaire. À cette fin, nous emploierons la méthode des *self-énergies* de contact [45]. Une étude similaire a été réalisée récemment par Shen & Yang dans le cas d'une jonction FM/I/FM [50].

Les calculs qui suivent seront fait en une dimension pour des raisons de simplicité qui apparaîtront évidentes. De plus, nous travaillerons cette fois-ci dans le réseau direct plutôt que dans le réseau réciproque.

4.1 Formulation générale

Comme précédemment, nous identifions le courant de moment magnétique alterné avec le taux de variation instantané du moment magnétique alterné de l'antiferroaimant de gauche :

$$\mathbf{J}_S \equiv d\hat{\mathbf{S}}_G/dt = \frac{1}{i\hbar}[\hat{\mathbf{S}}_G, \hat{H}_T] \ , \tag{4.1}$$

avec

$$\hat{\mathbf{S}}_G = \frac{\hbar}{2}\sum_{j\in G} e^{-iQj} c^\dagger_{j\alpha}\vec{\sigma}_{\alpha\beta}c_{j\beta} \ , \tag{4.2}$$

$$\hat{H}_T = -t'\sum_{\sigma} c^\dagger_{0,\sigma}c_{1,\sigma} + c.c. \ , \tag{4.3}$$

où les indices $j = \{..., -2, -1, 0\}$ dénotent les sites de l'AF gauche (les sites de l'AF droit étant pris dans l'ensemble $\{1, 2, 3, ...\}$), $Q = \pi$ est le nombre d'onde antiferromagnétique et t' est l'élément de matrice de saut définissant la barrière tunnel. Un calcul direct donne

$$\mathbf{J}_S = \frac{1}{2}\int \frac{d\omega}{2\pi}\mathrm{Tr}[\vec{\sigma}(t'G^<_{rl}(\omega) - t'^*G^<_{lr}(\omega))] \ , \tag{4.4}$$

où $G^<_{l\sigma,r\sigma'}(t,t') = i\langle c^\dagger_{1,\sigma'}(t')c_{0,\sigma}(t)\rangle$ avec $l(r)$ signifiant *left* (*right*), $\langle ... \rangle$ est une moyenne thermique et la trace est prise sur l'espace des spins. En l'absence de biais, nous pouvons utiliser la relation suivante, valable à l'équilibre thermodynamique :

$$G^<(\omega) = [G^a(\omega) - G^r(\omega)]f(\omega) \ , \tag{4.5}$$

où $G^{r(a)}(\omega)$ est la fonction de Green retardée (avancée) et $f(\omega)$ est la distribution de Fermi-Dirac.

Le reste de ce chapitre est essentiellement consacré à la description de la méthode employée afin de calculer les fonctions de Green $G^{r(a)}$. Cette méthode repose sur l'utilisation des *self-énergies* de contact et requiert que nous retournions sur le terrain de la première quantification.

4.2 Équation de Schrödinger d'un AF itinérant 1D

En l'absence de potentiel externe, l'équation de Schrödinger d'un AF itinérant infini en une dimension dans l'approximation des *liaisons fortes* s'écrit

$$\begin{aligned}
&\vdots \\
-t\Psi^A_{i-2,\sigma} + (\mathcal{E}+\Delta\sigma)\Psi^B_{i-1,\sigma} - t\Psi^A_{i,\sigma} &= 0 \\
-t\Psi^B_{i-1,\sigma} + (\mathcal{E}-\Delta\sigma)\Psi^A_{i,\sigma} - t\Psi^B_{i+1,\sigma} &= 0 \\
-t\Psi^A_{i,\sigma} + (\mathcal{E}+\Delta\sigma)\Psi^B_{i+1,\sigma} - t\Psi^A_{i+2,\sigma} &= 0 \\
-t\Psi^B_{i+1,\sigma} + (\mathcal{E}-\Delta\sigma)\Psi^A_{i+2,\sigma} - t\Psi^B_{i+3,\sigma} &= 0 \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.6}$$

où E est l'énergie, $\Delta \equiv US/2$ est l'amplitude du champ moyen (voir annexe A), i est un indice de site, t représente l'interaction entre sites voisins, $\sigma = \pm 1$ pour un spin $\uparrow$ ($\downarrow$) et les exposants A et B réfèrent aux deux sous-réseaux du réseau bipartite. En vertu du théorème de Bloch, on pose

$$\begin{pmatrix} \Psi^A_{i+2n,\sigma} \\ \Psi^B_{i+2n+1,\sigma} \end{pmatrix} = e^{ik(2na)} \begin{pmatrix} \Psi^A_{i,\sigma} \\ \Psi^B_{i+1,\sigma} \end{pmatrix} \quad , \tag{4.7}$$

ce qui nous permet de récrire (4.6) de façon plus compacte sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} (\mathcal{E}-\Delta\sigma) & -t-te^{-2ika} \\ -t-te^{2ika} & (\mathcal{E}+\Delta\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^A_{i,\sigma} \\ \Psi^B_{i+1,\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{4.8}$$

Le spectre des énergies propres se compose d'une bande de conduction (c) d'énergie $\mathcal{E} = +E$ et d'une bande de valence (v) d'énergie $\mathcal{E} = -E$ où $E \equiv \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}$ et $\epsilon_k = -2t\cos ka$.

Les vecteurs propres correspondant sont

$$\gamma_\sigma^c(E) = \begin{pmatrix} e^{-ika/2}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{\Delta\sigma}{E}\right)\right]^{1/2} \\ -e^{ika/2}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{\Delta\sigma}{E}\right)\right]^{1/2} \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

$$\gamma_\sigma^v(E) = \begin{pmatrix} e^{-ika/2}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{\Delta\sigma}{E}\right)\right]^{1/2} \\ e^{ika/2}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{\Delta\sigma}{E}\right)\right]^{1/2} \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

4.3 "Repliement" de l'équation de Schrödinger de la jonction AF/I/AF

Nous allons représenter spatialement la jonction tunnel AF/I/AF de la façon suivante :

$$\cdots\ \underbrace{\Psi^A_{l,-4,\sigma}\ \ \Psi^B_{l,-3,\sigma}}_{n=-2}\ \ \underbrace{\Psi^A_{l,-2,\sigma}\ \ \Psi^B_{l,-1,\sigma}}_{n=-1}\ \ \Psi^A_{l,0,\sigma}\ \Big\|\ \Psi^B_{r,1,\sigma}\ \ \underbrace{\Psi^A_{r,2,\sigma}\ \ \Psi^B_{r,3,\sigma}}_{n=1}\ \ \underbrace{\Psi^A_{r,4,\sigma}\ \ \Psi^B_{r,5,\sigma}}_{n=2}\ \cdots$$

où nous avons écrit explicitement le symbole de la fonction d'onde correspondante en chaque point du réseau. Les deux barres verticales au centre représentent la barrière tunnel et n est un indice étiquettant les cellules unité successives. Nous avons également pris soin d'indiquer la disposition relative de chacun des deux sous-réseaux A et B du réseau bipartite de chacun des AF par rapport à la barrière tunnel. Pour l'instant, nous considérons que les axes de quantification du spin à gauche et à droite de la jonction sont colinéaires. Il sera en effet plus simple d'incorporer la non-colinéarité plus tard en agissant directement sur les fonctions de Green de surface au moyen de transformations unitaires.

L'équation de Schrödinger de ce système s'écrit

$$\vdots$$

$$-t\Psi^A_{l,-2,\sigma} + (\mathcal{E} + \Delta\sigma)\Psi^B_{l,-1,\sigma} - t\Psi^A_{l,0,\sigma} = 0 \tag{4.11}$$

$$-t\Psi^B_{l,-1,\sigma} + (\mathcal{E} - \Delta\sigma)\Psi^A_{l,0,\sigma} - t'\Psi^B_{r,1,\sigma} = 0 \tag{4.12}$$

$$-t'\Psi^A_{l,0,\sigma} + (\mathcal{E} + \Delta\sigma)\Psi^B_{r,1,\sigma} - t\Psi^A_{r,2,\sigma} = 0 \tag{4.13}$$

$$-t\Psi^B_{r,1,\sigma} + (\mathcal{E} - \Delta\sigma)\Psi^A_{r,2,\sigma} - t\Psi^B_{r,3,\sigma} = 0 \tag{4.14}$$

$$\vdots$$

où la constante de couplage entre sites voisins est t à l'intérieur de chacun des AF et t' à travers la barrière tunnel. Ce système d'équations avec des conditions aux limites ouvertes (CLO) peut s'écrire comme un système matriciel de dimension infinie. Dans cette section, nous allons décrire une méthode permettant de "replier" (de l'anglais "fold") les effets des CLO dans la région finie correspondant à l'interface (sites $(l,0)$ et $(r,1)$). Ceci nous permettra de travailler avec des matrices de petite dimension dans lesquelles l'influence des CLO est modélisée par des *self-énergies* de contact.

On peut écrire la fonction d'onde dans l'AF gauche dûe à une quasiparticule incidente de spin σ dans la bande de conduction (valence) sous la forme suivante :

$$\Psi^{c(v)}_{ln,\sigma} = (e^{2ikna} + S^{c(v)}_{ll,\sigma} e^{-2ikna})\ \gamma^{c(v)}_\sigma\ , \qquad \text{dans l'AF gauche} \tag{4.15}$$

$$\Psi^{c(v)}_{rn,\sigma} = e^{2ikna} S^{c(v)}_{rl,\sigma}\ \gamma^{c(v)}_\sigma\ , \qquad \text{dans l'AF droit} \tag{4.16}$$

où $S^{c(v)}_{ll,\sigma}$ est l'amplitude de réflexion, $S^{c(v)}_{rl,\sigma}$ est l'amplitude de transmission et n est l'indice de cellule unité. Nous faisons, de plus, l'hypothèse qu'il n'y a pas de changement de bande à travers la jonction. Ici, le nombre d'onde k est déterminé par la relation $E = \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}$.

Nous allons donner l'exemple d'une quasiparticule incidente de spin $\uparrow$ dans la bande de conduction. Ceci nous permettra de déterminer $S^c_{ll,\uparrow}$ et $S^c_{rl,\uparrow}$. Donc, en posant

$$\begin{pmatrix} \Psi^A_{l,-2,\uparrow} \\ \Psi^B_{l,-1,\uparrow} \end{pmatrix} = (e^{-2ika} + S^c_{ll,\uparrow} e^{2ika}) \begin{pmatrix} e^{-ika/2}\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\Delta}{E}\right)\right]^{1/2} \\ -e^{ika/2}\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Delta}{E}\right)\right]^{1/2} \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

dans l'équation (4.11), on obtient

$$\begin{aligned} &- t(e^{-2ika} + S^c_{ll,\uparrow} e^{2ika}) e^{-ik_l a/2} \left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{\Delta}{E}\right)\right]^{1/2} \\ &\qquad - (E+\Delta)(e^{-2ika} + S^c_{ll,\uparrow} e^{2ika}) e^{ik_l a/2} \left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{\Delta}{E}\right)\right]^{1/2} - t\Psi^A_{l,0,\uparrow} = 0 \end{aligned} \tag{4.18}$$

et par suite, on trouve

$$S^c_{ll,\uparrow} = -e^{-4ika} + e^{-7ika/2} \left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{\Delta}{E}\right)\right]^{-1/2} \Psi^A_{l,0,\uparrow} \ . \tag{4.19}$$

En subtituant (4.17) et (4.19) dans (4.12), on obtient alors

$$(E - \Delta - \Sigma^c_{L\uparrow})\Psi^A_{l,0,\uparrow} - t'\Psi^B_{r,1,\uparrow} = 0 \tag{4.20}$$

où l'on a défini la *self-énergie* de contact

$$\Sigma^c_{L\uparrow} \equiv -te^{-ika}\sqrt{\frac{E-\Delta}{E+\Delta}} \ . \tag{4.21}$$

De la même façon, en posant

$$\begin{pmatrix} \Psi^A_{r,2,\uparrow} \\ \Psi^B_{r,3,\uparrow} \end{pmatrix} = e^{2ika} S^c_{rl,\uparrow} \begin{pmatrix} e^{-ika/2}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{\Delta}{E}\right)\right]^{1/2} \\ -e^{ika/2}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{\Delta}{E}\right)\right]^{1/2} \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

dans l'équation (4.14) et en isolant $S^c_{rl,\uparrow}$, on obtient

$$S^c_{rl,\uparrow} = -e^{-ika/2}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{\Delta}{E}\right)\right]^{-1/2} \Psi^B_{r,1,\uparrow} \ . \tag{4.23}$$

Ensuite, en substituant (4.22) et (4.23) dans (4.13), on obtient alors

$$-t'\Psi^A_{l,0,\uparrow} + (E + \Delta - \Sigma^c_{R\uparrow})\Psi^B_{r,1,\uparrow} = 0 \ , \tag{4.24}$$

où

$$\Sigma^c_{R\uparrow} \equiv -te^{ika}\sqrt{\frac{E+\Delta}{E-\Delta}} \ . \tag{4.25}$$

En reprenant le calcul pour une quasiparticule de spin $\downarrow$, on trouverait

$$\Sigma^c_{L\downarrow} = -te^{-ika}\sqrt{\frac{E+\Delta}{E-\Delta}}\ , \tag{4.26}$$

$$\Sigma^c_{R\downarrow} = -te^{ika}\sqrt{\frac{E-\Delta}{E+\Delta}}\ . \tag{4.27}$$

Par conséquent, en ce qui concerne la bande de conduction, nous avons réussi à réduire l'équation de Schrödinger aux CLO de la jonction AF/I/AF sous la forme compacte

$$\begin{pmatrix} (E-\Delta-\Sigma^c_{L\uparrow}) & 0 & -t' & 0 \\ 0 & (E+\Delta-\Sigma^c_{L\downarrow}) & 0 & -t' \\ -t' & 0 & (E+\Delta-\Sigma^c_{R\uparrow}) & 0 \\ 0 & -t' & 0 & (E-\Delta-\Sigma^c_{R\downarrow}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^A_{l,0,\uparrow} \\ \Psi^A_{l,0,\downarrow} \\ \Psi^B_{r,1,\uparrow} \\ \Psi^B_{r,1,\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ . \tag{4.28}$$

4.4 Calcul des fonctions de Green retardée et avancée

En général, la fonction de Green retardée G^r associée à l'équation de Schrödinger ($[E-H]\Psi = 0$) est

$$[E - H + i\eta]G^r = I\ , \tag{4.29}$$

où η est une quantité positive infinitésimale qui déplace les pôles de G^r dans le demi-plan complexe inférieur et H est l'hamiltonien. La fonction de Green avancée G^a est définie similairement en faisant la substitution $i\eta \to -i\eta$.

La fonction de Green retardée G^r correspondant à l'équation de Schrödinger (4.28) est définie par la relation

$$AG^r = I \qquad \rightarrow \qquad \begin{pmatrix} A_{ll} & A_{lr} \\ A_{rl} & A_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^r_{ll} & G^r_{lr} \\ G^r_{rl} & G^r_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\ , \tag{4.30}$$

où

$$A_{rl} = A_{lr} = \begin{pmatrix} -t' & 0 \\ 0 & -t' \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

et

$$A_{ll} = \begin{pmatrix} E - \Delta - (\Sigma^c_{L\uparrow})^* & 0 \\ 0 & E + \Delta - (\Sigma^c_{L\downarrow})^* \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

$$A_{rr} = \begin{pmatrix} E + \Delta - \Sigma^c_{R\uparrow} & 0 \\ 0 & E - \Delta - \Sigma^c_{R\downarrow} \end{pmatrix} . \tag{4.33}$$

Dans (4.30), le rôle de la quantité $+i\eta$ est tenu par les parties imaginaires des quantités $+i\mathrm{Im}[-(\Sigma^c_{L\uparrow(\downarrow)})^*]$ et $+i\mathrm{Im}[-\Sigma^c_{R\uparrow(\downarrow)}]$ (bien que ces dernières ne soit pas, en général, infinitésimales). Il suit immédiatement de cela que la fonction de Green avancée G^a associée à l'équation de Schrödinger (4.28) est définie par la relation

$$A^* G^a = I \ . \tag{4.34}$$

La solution de (4.30) est donnée par l'équation de Dyson

$$G^r = G^{0,r} + G^{0,r} V G^r \ , \tag{4.35}$$

où

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -A_{lr} \\ -A_{rl} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

et où la *fonction de Green de surface* retardée $G^{0,r}$ est définie par

$$G^{0,r} = \begin{pmatrix} A_{ll}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{rr}^{-1} \end{pmatrix} \ , \tag{4.37}$$

avec

$$A_{ll}^{-1} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{t} e^{ika} \sqrt{\frac{E+\Delta}{E-\Delta}} \right) & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{t} e^{ika} \sqrt{\frac{E-\Delta}{E+\Delta}} \right) \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

$$A_{rr}^{-1} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{t} e^{ika} \sqrt{\frac{E-\Delta}{E+\Delta}} \right) & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{t} e^{ika} \sqrt{\frac{E+\Delta}{E-\Delta}} \right) \end{pmatrix} . \tag{4.39}$$

Rappelons-nous, à présent, que nous sommes intéressés par le cas où les moments magnétiques alternés de part et d'autre de la jonction tunnel sont non-colinéaires. Nous supposerons que le moment de l'AF gauche est polarisé dans la direction du vecteur unitaire $(0,0,1)$ et que le moment de l'AF droit est polarisé selon $(\sin\theta, 0, \cos\theta)$. Il est alors possible d'introduire cette non-colinéarité dans nos calculs en agissant directement sur la fonction de Green de surface au moyen d'une transformation unitaire. Plus précisément,

$$G^{0,r} \to \begin{pmatrix} A_{ll}^{-1} & 0 \\ 0 & UA_{rr}^{-1}U^{\dagger} \end{pmatrix} , \tag{4.40}$$

où

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} . \tag{4.41}$$

Si l'on se réfère maintenant à la formule (4.4) pour le courant de moment magnétique alterné à travers la jonction tunnel, les parties de G^r qui nous intéressent sont les blocs hors-diagonaux G^r_{rl} et G^r_{lr}. En solutionnant l'équation de Dyson (4.35) avec (4.40), on obtient

$$G^r_{rl} = \frac{1}{\Lambda}\begin{pmatrix} \left[-e^{4ika}\frac{t'^3}{t^4} + e^{2ika}\frac{t'}{t^2}\left(\frac{E-\Delta\cos\theta}{E-\Delta}\right)\right] & \left[-e^{2ika}\frac{t'}{t^2}\left(\frac{\Delta}{E+\Delta}\right)\sin\theta\right] \\ \left[-e^{2ika}\frac{t'}{t^2}\left(\frac{\Delta}{E-\Delta}\right)\sin\theta\right] & \left[-e^{4ika}\frac{t'^3}{t^4} + e^{2ika}\frac{t'}{t^2}\left(\frac{E+\Delta\cos\theta}{E+\Delta}\right)\right] \end{pmatrix} \tag{4.42}$$

et

$$G^r_{lr} = (G^r_{rl})^T \tag{4.43}$$

où

$$\Lambda = 1 - 2e^{2ika}\left|\frac{t'}{t}\right|^2\left(\frac{E^2-\Delta^2\cos\theta}{E^2-\Delta^2}\right) + e^{4ika}\left|\frac{t'}{t}\right|^4 . \tag{4.44}$$

De la même façon, les fonctions de Green avancée G^a_{rl} et G^a_{lr} s'obtiennent de l'équation de Dyson (4.35) en faisant la substitution

$$G^{0,r} \to G^{0,a} = (G^{0,r})^* . \tag{4.45}$$

On trouve ainsi

$$G^a_{rl} = (G^r_{rl})^* \ , \tag{4.46}$$

$$G^a_{lr} = (G^r_{lr})^* \ . \tag{4.47}$$

En substituant $G^<_{rl}(\omega) = \big[G^a_{rl}(\omega) - G^r_{rl}(\omega)\big] f(\omega)$ ainsi que $G^<_{lr}(\omega) = \big[G^a_{lr}(\omega) - G^r_{lr}(\omega)\big] f(\omega)$ dans l'équation (4.4), on obtient alors la contribution de la bande de conduction ($\omega \in [\Delta, \sqrt{4t^2 + \Delta^2}]$) au courant de moment magnétique alterné. En refaisant le calcul qui précède à partir de quasiparticules incidentes dans la bande de valence, on retrouve exactement la même expression, mais cette fois avec $\omega \in [-\sqrt{4t^2 + \Delta^2}, -\Delta]$. En combinant ces deux contributions, on obtient donc :

Proposition 11. *Le courant Josephson de moment magnétique alterné à travers une jonction tunnel antiferromagnétique obtenu par la méthode des self-énergies de contact est :*

$$\begin{aligned} J^x_S &= 0 \ , \\ J^y_S &= 2\left\{ \left|\frac{t'}{t}\right|^2 - \left|\frac{t'}{t}\right|^6 \right\} \int \frac{d\omega}{\pi} f(\omega) \frac{\Delta^2}{E^2 - \Delta^2} \sin(2ka) \sin\theta / |\Lambda|^2 \ , \\ J^z_S &= 0 \ , \end{aligned} \tag{4.48}$$

où

$$\begin{aligned} |\Lambda|^2 = 1 - 4\left\{ \left|\frac{t'}{t}\right|^2 + \left|\frac{t'}{t}\right|^6 \right\} \frac{E^2 - \Delta^2\cos\theta}{E^2 - \Delta^2} \cos(2ka) + 2\left|\frac{t'}{t}\right|^4 \cos(4ka) \\ + 4\left|\frac{t'}{t}\right|^4 \left(\frac{E^2 - \Delta^2\cos\theta}{E^2 - \Delta^2}\right)^2 + \left|\frac{t'}{t}\right|^8 \end{aligned} \tag{4.49}$$

et $\omega \in [-\sqrt{4t^2 + \Delta^2}, -\Delta] \cup [\Delta, \sqrt{4t^2 + \Delta^2}]$. *Dans (4.48) et (4.49),* $E = \omega$ *et* k *est déterminé par la relation* $\omega = \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}$.

L'expression (4.48) pour le courant de moment magnétique alterné, avec ω intégré sur tous le spectre de fréquence, est un résultat exact dans le cadre de notre modèle et contient tous les ordres de la séries de perturbartion en $|t'|/|t|$. Lorsque la barrière isolante est forte et que la transmission tunnel des électrons est faible, c'est-à-dire $|t'|^2 \ll |t|^2$, il est raisonnable de négliger les termes d'ordre supérieur. À l'ordre $|t'|^2/|t|^2$, l'expression (4.49) devient indépendante de θ et le courant de moment magnétique alterné est alors donné approximativement par le produit vectoriel des deux moments, $\mathbf{J}_S = J_c\,\mathbf{S}_G \times \mathbf{S}_D$ ($J_c > 0$), similairement à l'expression (2.37) obtenue précédemment en réponse linéaire.

Lorsque la transparence tunnel est élevée, les termes d'ordre supérieur en $|t'|/|t|$ ne peuvent plus être négligés et pour $|t'| \sim |t|$, le courant de moment magnétique alterné décroît considérablement. Dans la limite $|t'| = |t|$, il s'annule complètement !

L'inexistence du courant de moment magnétique alterné dans la limite $|t'| = |t|$ semble pointer vers une faille de notre formalisme. En effet, n'oublions pas que notre approche a consisté, en premier lieu, à calculer les self-énergies de contact dans le cas où l'onde de densité de spin est uniforme à travers la jonction. Pour ce faire, nous avons supposé que les quasiparticules subissaient un processus de diffusion à la barrière tunnel. Nous avons ensuite agit sur les fonctions de Green de surface au moyen de transformations unitaires afin d'introduire la non-colinéarité des moments magnétiques alternés de part et d'autre de la jonction. Or, si $|t'| = |t|$ et que l'onde de densité de spin est uniforme à travers le système, les quasiparticules ne devraient pas subir de diffusion au niveau de la barrière. C'est donc cette première étape de notre calcul qui doit être remise en question dans cette limite. En fait, il semble qu'il soit alors nécessaire d'introduire la non-colinéarité directement dans l'équation de Schrödinger (4.11)-(4.14). Il serait évidemment intéressant d'explorer cette avenue dans de futurs travaux.

Chapitre 5

Cas de la coexistence entre Antiferromagnétisme et Supraconductivité de Type d

La nature du mécanisme à l'origine de la formation des paires de Cooper dans les supraconducteurs à haute température critique (SHTC) constitue un des principaux problèmes de la physique du solide depuis la découverte de ces matériaux par Bednorz et Müller en 1985. Une des avenues de recherche les plus activement poursuivies, aussi bien sur le plan théorique qu'expérimental, est la possibilité que l'interaction attractive à l'origine de l'appariement soit médiée par les fluctuations antiferromagnétiques plutôt que par les phonons.

Antiferromatisme (AF) et supraconductivité (SC) à haute température critique apparaissent, en effet, intimement reliés : certains composés SHTC présentent des phases mixtes AF/SC (par exemple, les supraconducteurs organiques et les fermions lourds), d'autres présentent une séparation entre les deux phases à l'échelle microscopique (ce qui semble être le cas, notamment, des cuprates).

À ce jour, toutefois, la question de savoir si les deux phases peuvent coexister de façon homogène dans les cuprates demeure sujet à controverse. Il est possible que l'étude de l'effet Josephson généralisé puisse contribuer à y apporter une réponse. De récentes études ont d'ailleurs été menées dans une perspective similaire dans le cas où supraconductivité et ferromagnétisme coexistent [31].

Dans ce chapitre, nous étudierons l'effet Josephson de spin dans le cas où un ordre antiferromagnétique commensurable de vecteur d'onde $\mathbf{Q} = (\pi, \pi)$ coexiste avec la supraconductivité de type d. Nous vérifierons aussi les conséquences de cette coexistence de phases sur l'effet Josephson de charge.

5.1 Le modèle

Nous travaillerons à partir d'un hamiltonien phénoménologique champ moyen dans lequel antiferromagnétisme et supraconductivité de type d sont incorporés sur un pied d'égalité. La description que nous allons en donner suit celle donnée par Kyung [46], mais des hamiltoniens champ moyen ayant essentiellement la même forme avaient été précédemment étudiés par Psaltakis & Fenton [47], Kato & Machida [48] et Murakami & Fukuyama [49]. Cet hamiltonien s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}\hat{H} = &\sum_{\mathbf{k}\sigma}(\xi_{\mathbf{k}} - \mu)c^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}c_{\mathbf{k}\sigma} + U\sum_{i}(c^{\dagger}_{i,\uparrow}c_{i,\uparrow}\langle c^{\dagger}_{i,\downarrow}c_{i,\downarrow}\rangle + h.c.)\\ &- V\sum_{i}(\Delta^{\dagger}_{d,i}\langle\Delta_{d,i}\rangle + h.c.) - W\sum_{i}(\Delta^{\dagger}_{t,i}\langle\Delta_{t,i}\rangle + h.c.)\ .\end{aligned} \tag{5.1}$$

Les opérateurs de destruction d'une paire de Cooper dans l'état singulet et dans l'état triplet sont définis respectivement par

$$\Delta_{d,i} = \frac{1}{2}\sum_{\delta} g(\delta)(c_{i+\delta,\uparrow}c_{i,\downarrow} - c_{i+\delta,\downarrow}c_{i,\uparrow}), \tag{5.2}$$

$$\Delta_{t,i} = \frac{1}{2}\sum_{\delta} g(\delta)(c_{i+\delta,\uparrow}c_{i,\downarrow} + c_{i+\delta,\downarrow}c_{i,\uparrow}) \tag{5.3}$$

avec un facteur de structure $g(\delta)$ de type d

$$g(\delta) = \begin{cases} 1/2 \quad \text{si} \quad \delta = (\pm 1, 0) \ , \\ -1/2 \quad \text{si} \quad \delta = (0, \pm 1) \ , \\ 0 \quad \text{autrement} \ . \end{cases} \tag{5.4}$$

L'amplitude $\langle \Delta_{t,i} \rangle$ est introduite pour des raisons d'auto-cohérence. En particulier, nous verrons qu'elle est générée par les équations auto-cohérentes même lorsque $W = 0$.

Les interactions associées à l'antiferromagnétisme (AF) et à la supraconductivité singulet (SC_d) et triplet (SC_t) dépendent des valeurs des paramètres U, V et W respectivement, lesquels sont tous positifs dans ce qui suit. Finalement, μ est le potentiel chimique et $\xi_{\mathbf{k}}$ est la relation de dispersion dans l'approximation des *liaisons fortes* définie par $\xi_{\mathbf{k}} = -2t(\cos k_x + \cos k_y) - 4t' \cos k_x \cos k_y$, où t et t' sont les amplitudes de saut au "premiers voisins" et "deuxièmes voisins".

Dans l'approximation champ moyen (CM), on définit trois paramètres d'ordre m, s et t correspondant aux trois interactions mentionnées précédemment (AF, SC_d et SC_t) :

$$\begin{aligned} \langle c^\dagger_{i\sigma} c_{i\sigma} \rangle = \langle n_{i\sigma} \rangle = \frac{n}{2} + \sigma m \cos(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_i) \ , \\ \frac{1}{2} \sum_\delta g(\delta) \langle c_{i+\delta,\uparrow} c_{i,\downarrow} - c_{i+\delta,\downarrow} c_{i,\uparrow} \rangle = s \ , \\ \frac{1}{2} \sum_\delta g(\delta) \langle c_{i+\delta,\uparrow} c_{i,\downarrow} + c_{i+\delta,\downarrow} c_{i,\uparrow} \rangle = t \cos(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_i) \ , \end{aligned} \tag{5.5}$$

où $\mathbf{Q}$ est le vecteur d'onde antiferromagnétique (commensurable) égal à (π, π) en deux dimensions. On réfère au paramètre d'ordre t sous le vocable de *triplet* π. L'hamiltonien est à présent quadratique en fonction des opérateurs électroniques originaux $\{c^\dagger_{i\sigma}, c_{i\sigma}\}$. En introduisant un nouvel opérateur champ à quatre composantes $\psi_{\mathbf{k}}$, il devient bilinéaire

$$\hat{H}_{CM} = \sum_{\mathbf{k}}^{*} \psi^\dagger_{\mathbf{k}} M_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}} + E_0 \ , \tag{5.6}$$

où

$$\psi^\dagger_{\mathbf{k}} \equiv \big(c^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow}, c_{-\mathbf{k}\downarrow}, c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\uparrow}, c_{-\mathbf{k}-\mathbf{Q}\downarrow} \big). \tag{5.7}$$

La matrice $M_{\mathbf{k}}$ est donnée par

$$M_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\mathbf{k}} & Vs\phi(\mathbf{k}) & -Um & Wt\phi(\mathbf{k}) \\ Vs\phi(\mathbf{k}) & -\epsilon_{\mathbf{k}} & -Wt\phi(\mathbf{k}) & -Um \\ -Um & -Wt\phi(\mathbf{k}) & \epsilon_{\mathbf{k+Q}} & -Vs\phi(\mathbf{k}) \\ Wt\phi(\mathbf{k}) & -Um & -Vs\phi(\mathbf{k}) & -\epsilon_{\mathbf{k+Q}} \end{pmatrix} , \tag{5.8}$$

où

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \xi_{\mathbf{k}} - \mu \tag{5.9}$$

et $\phi(\mathbf{k}) = \cos k_x - \cos k_y$ est la transformée de Fourier de $g(\delta)$. L'étoile au-dessus du symbole de sommation dans l'équation (5.6) signifie que l'on ne somme que sur les vecteurs d'onde situés à l'intérieur de la zone de Brillouin magnétique. Ceci permet de tenir compte du fait que la présence de l'ordre AF (commensurable) double la cellule unité. Le décalage constant en énergie E_0 est donné par

$$E_0 = N(Um^2 + Vs^2 + Wt^2 - \mu) , \tag{5.10}$$

où N est le nombre total de sites du réseau. Les valeurs propres de $M_{\mathbf{k}}$ donnent quatre relations de dispersion $\pm E_{\pm}(\mathbf{k})$

$$E_{\pm}(\mathbf{k}) = \left[\frac{\left(\epsilon_{\mathbf{k}}^2 + \epsilon_{\mathbf{k+Q}}^2\right)}{2} + (Um)^2 + [Vs\phi(\mathbf{k})]^2 + [Wt\phi(\mathbf{k})]^2 \pm g(\mathbf{k}) \right]^{\frac{1}{2}} , \tag{5.11}$$

où $g(\mathbf{k})$ est donné par

$$g(\mathbf{k}) = \left[\frac{\left(\epsilon_{\mathbf{k}}^2 - \epsilon_{\mathbf{k+Q}}^2\right)^2}{4} + \left(\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k+Q}}\right)^2 [Wt\phi(\mathbf{k})]^2 + \left\{ (\epsilon_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k+Q}})(Um) + 2[Vs\phi(\mathbf{k})][Wt\phi(\mathbf{k})] \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} . \tag{5.12}$$

Lorsque $s = t = 0$ ou $m = t = 0$ les énergies propres se réduisent respectivement à celles de l'hamiltonien ODS ou BCS.

L'énergie libre se calcule aisément en utilisant la formule de la trace ($F = -T \log Z$ avec $Z = \mathrm{Tr} \exp(-\beta \hat{H})$)

$$F = -2T \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=\pm} \log \left[2 \cosh \left(\frac{\beta E_{\alpha}(\mathbf{k})}{2} \right) \right] + E_0 . \tag{5.13}$$

À présent, les trois équations de champ moyen s'obtiennent à partir de la condition de stationnarité de F relativement aux trois paramètres d'ordre $\partial F/\partial m = \partial F/\partial s = \partial F/\partial t = 0$ et le potentiel chimique μ est déterminé par la relation thermodynamique $n = -\partial F/\partial \mu$. Les quatres équations résultantes sont

$$m = \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\alpha=\pm}\Bigg\{(Um) + \alpha\frac{(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k+Q}})}{2g(\mathbf{k})}\Big\{(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k+Q}})(Um) + 2[Vs\phi(\mathbf{k})][Wt\phi(\mathbf{k})]\Big\}\Bigg\}\frac{1}{E_\alpha(\mathbf{k})}\tanh\left(\frac{\beta E_\alpha(\mathbf{k})}{2}\right), \tag{5.14}$$

$$s = \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\alpha=\pm}\phi(\mathbf{k})\Bigg\{[Vs\phi(\mathbf{k})] + \alpha\frac{[Wt\phi(\mathbf{k})]}{g(\mathbf{k})}\Big\{(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k+Q}})(Um) + 2[Vs\phi(\mathbf{k})][Wt\phi(\mathbf{k})]\Big\}\Bigg\}\frac{1}{E_\alpha(\mathbf{k})}\tanh\left(\frac{\beta E_\alpha(\mathbf{k})}{2}\right), \tag{5.15}$$

$$t = \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\alpha=\pm}\phi(\mathbf{k})\Bigg\{[Wt\phi(\mathbf{k})] + \alpha\frac{[Wt\phi(\mathbf{k})](\epsilon_{\mathbf{k}}-\epsilon_{\mathbf{k+Q}})^2}{2g(\mathbf{k})} + \alpha\frac{[Vs\phi(\mathbf{k})]}{g(\mathbf{k})}\Big\{(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k+Q}})(Um) + 2[Vs\phi(\mathbf{k})][Wt\phi(\mathbf{k})]\Big\}\Bigg\}\frac{1}{E_\alpha(\mathbf{k})}\tanh\left(\frac{\beta E_\alpha(\mathbf{k})}{2}\right), \tag{5.16}$$

$$n = 1 - \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\alpha=\pm}\Bigg\{(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k+Q}}) + \alpha\frac{(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k+Q}})(\epsilon_{\mathbf{k}}-\epsilon_{\mathbf{k+Q}})^2}{2g(\mathbf{k})} + \alpha\frac{2(Um)}{g(\mathbf{k})}\Big\{(\epsilon_{\mathbf{k}}+\epsilon_{\mathbf{k+Q}})(Um) + 2[Vs\phi(\mathbf{k})][Wt\phi(\mathbf{k})]\Big\}\Bigg\}\frac{1}{E_\alpha(\mathbf{k})}\tanh\left(\frac{\beta E_\alpha(\mathbf{k})}{2}\right). \tag{5.17}$$

5.2 Propriétés du modèle et diagrammes de phases

Premièrement, remarquons que seulement un état avec un seul paramètre d'ordre ou avec l'ensemble des trois est possible et ce, malgré que les paramètres U, V et W

soient tous trois non-nuls. Le premier cas est évident. Supposons donc que deux des trois paramètres d'ordre, par exemple m et s, sont non-nuls et vérifions si le troisième (t) peut ou non s'annuler. Puisque les équations champ moyen ont la même forme par rapport aux trois paramètres d'ordre, ce choix particulier suffit. Le côté droit de l'équation pour t, Éq.(5.16), contient un terme qui est indépendant de t,

$$[Vs\phi(\mathbf{k})](\epsilon_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k+Q}})(Um) \ . \tag{5.18}$$

Par conséquent, à moins que ce terme soit annulé par une combinaison des autres termes, le troisième paramètre d'ordre t est non-nul. Mais comme (5.18) ne peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres termes, une annulation parfaite est exclue.

Deuxièmement, malgré qu'un des paramètres soit nul, par exemple $W = 0$, le paramètre d'ordre correspondant (t dans ce cas) peut être généré par les équations auto-cohérentes. Puisque les termes contenant t à droite de l'égalité dans (5.16) interviennent sous la forme $Wt\phi(\mathbf{k})$, seul (5.18) survit pour $W = 0$. En autant que les paramètres d'ordre AF et SC$_d$ coexistent, l'amplitude de t est aussi non-nulle et ce, même lorsque $W = 0$.

Pour terminer cette section, nous présentons aux figures 5.1 et 5.2 certains des diagrammes de phases obtenus numériquement par B. Kyung pour ce modèle [46].

5.3 Courant Josephson de moment magnétique alterné

Comme précédemmment, le courant de moment magnétique alterné est définit par la moyenne thermique :

$$\dot{\mathbf{S}}_G(t) \equiv \langle d\hat{\mathbf{S}}_G/dt \rangle = (1/i\hbar)\langle [\hat{S}_G, \hat{H}_T] \rangle \ . \tag{5.19}$$

De la même façon qu'au chapitre 2, nous faisons un choix de jauge où tout l'effet de la différence d'orientation du moment antiferromagnétique ainsi que de la différence de

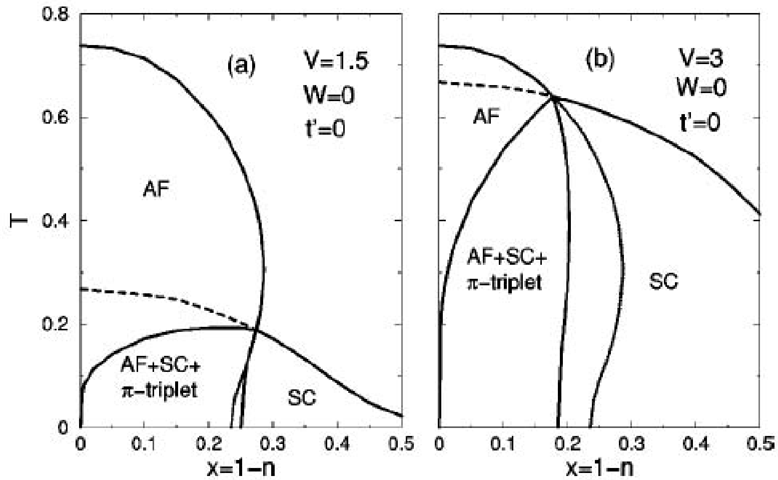

FIG. 5.1 – Diagramme de phase en fonction du dopage ($x = 1 - n$) et de la température (T) pour (a) $V = 1.5$ et (b) $V = 3$, avec $U = 4$, $W = 0$ et $t' = 0$. La courbe hachurée dénote la frontière de la phase SC avec $U = 0$ (figure tirée de [46]). La courbe représentant la frontière de la phase AF avec $V = 0$ dans le graphique a) (respectivement b)) est celle qui atteint $T = 0$ à la valeur la plus basse (respectivement la plus élevée) de $x > 0.1$.

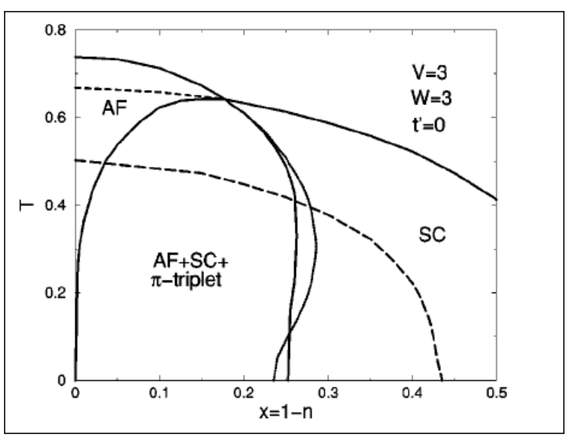

FIG. 5.2 – Diagramme de phase en fonction du dopage ($x = 1 - n$) et de la température (T) pour $U = 4$, $V = 3$, $W = 3$ et $t' = 0$. Les courbes hachurées et à longues hachures dénotent respectivement les frontières des phases SC avec $U = W = 0$ et π-triplet avec $U = V = 0$ (figure tirée de [46]). La courbe hachurée dénote la frontière de la phase SC avec $U = 0$ (figure tirée de [46]). La frontière de la phase AF avec $V = 0$ est celle qui atteint $T = 0$ à la valeur la plus élevée de x. La courbe représentant la frontière de la phase AF avec $V = W = 0$ est celle qui atteint $T = 0$ à la valeur la plus basse de x au-dessus de $x = 0.1$.

phase entre les paramètres d'ordre supraconducteurs est reporté sur le terme de saut :

$$\hat{H}_T = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{kq}\sigma\delta}\left(t_{\mathbf{kq}}\, e^{i\Delta\varphi/2}c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}U_{\sigma\delta}d_{\mathbf{q}\delta} + t^*_{\mathbf{kq}}\, e^{-i\Delta\varphi/2}d^\dagger_{\mathbf{q}\delta}U^\dagger_{\delta\sigma}c_{\mathbf{k}\sigma}\right) , \tag{5.20}$$

où $\Delta\varphi = \varphi_G - \varphi_D$. En utilisant cette expression pour l'hamiltonien tunnel, le courant (5.19) s'écrit explicitement comme :

$$\dot{\mathbf{S}}_G(t) = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{kq}}\sum_{\alpha\beta\delta}\mathrm{Im}\Big[e^{i\Delta\varphi/2}\vec{\sigma}_{\alpha\beta}U_{\beta\delta}\, t_{\mathbf{kq}}\big\langle c^\dagger_{\mathbf{k+Q}\alpha}(t)d_{\mathbf{q}\delta}(t)\big\rangle\Big] , \tag{5.21}$$

où $\langle ... \rangle$ est calculée avec la matrice densité complète. Pour évaluer l'expression (5.21), il est utile de passer dans la représentation des opérateurs propres $\gamma(\mathbf{k})$ de $\hat{H}_{CM}$ définis par la relation

$$\psi_{i\mathbf{k}} = \sum_j A_{ij}(\mathbf{k})\gamma_{j\mathbf{k}} \tag{5.22}$$

où les amplitudes de transformation A_{ij} sont données à l'annexe G. On obtient

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{S}}_G(t) = \frac{1}{N}\sideset{}{^*}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}}\sum_{\beta}\sum_{i,j}\mathrm{Im}\Big[e^{i\Delta\varphi/2}t_{\mathbf{kq}}\Big\{\vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\big\langle\gamma^\dagger_{i\mathbf{k}}(t)\gamma_{j\mathbf{q}}(t)\big\rangle \\ +\vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\downarrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow}\big\langle\gamma^\dagger_{i\mathbf{k}}(t)\gamma^\dagger_{j\mathbf{q}}(t)\big\rangle + \vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow}\big\langle\gamma_{i\mathbf{k}}(t)\gamma_{j\mathbf{q}}(t)\big\rangle + \vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\downarrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow}\big\langle\gamma_{i\mathbf{k}}(t)\gamma^\dagger_{j\mathbf{q}}(t)\big\rangle\Big\}\Big] ,\end{aligned} \tag{5.23}$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow} &= [A_{1i}(\mathbf{k}) + A_{3i}(\mathbf{k})][A_{1j}(\mathbf{q}) + A_{3j}(\mathbf{q})] \\ \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow} &= [A_{1i}(\mathbf{k}) + A_{3i}(\mathbf{k})][A_{2j}(\mathbf{q}) + A_{4j}(\mathbf{q})] \\ \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow} &= [A_{2i}(\mathbf{k}) + A_{4i}(\mathbf{k})][A_{1j}(\mathbf{q}) + A_{3j}(\mathbf{q})] \\ \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} &= [A_{2i}(\mathbf{k}) + A_{4i}(\mathbf{k})][A_{2j}(\mathbf{q}) + A_{4j}(\mathbf{q})] ,\end{aligned} \tag{5.24}$$

(voir l'annexe H pour une dérivation de (5.23) et (5.24)).

Comme précédemment, nous calculerons $\big\langle\gamma^\dagger_{i\mathbf{k}}(t)\gamma_{j\mathbf{q}}(t)\big\rangle$ en utilisant la théorie des perturbations au premier ordre en $\hat{H}_T$:

$$\big\langle\gamma^\dagger_{i\mathbf{k}}(t)\gamma_{j\mathbf{q}}(t)\big\rangle = -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}dt'\big\langle\big[\gamma^\dagger_{i\mathbf{k}}(t)\gamma_{j\mathbf{q}}(t), \hat{H}_T(t')\big]\big\rangle_0 , \tag{5.25}$$

où la moyenne $\langle ... \rangle_0$ est calculée avec $\hat{H}_0 = \hat{H}_G + \hat{H}_D$ (la partie non-perturbée de $\hat{H}$) et les opérateurs à droite de l'égalité sont dans la représentation d'interaction. En fonction des opérateurs $\gamma_i(\mathbf{k})$, l'hamiltonien tunnel s'écrit :

$$\begin{aligned}\hat{H}_T(t') = \frac{1}{N}\sideset{}{^*}\sum_{\mathbf{kq}}\sum_{ij}\Big[e^{i\Delta\varphi/2}\,t_{\mathbf{kq}}\Big\{U_{\uparrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\gamma^{\dagger}_{i\mathbf{k}}(t')\gamma_{j\mathbf{q}}(t') + U_{\uparrow\downarrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow}\gamma^{\dagger}_{i\mathbf{k}}(t')\gamma^{\dagger}_{j\mathbf{q}}(t') \\ + U_{\downarrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow}\gamma_{i\mathbf{k}}(t')\gamma_{j\mathbf{q}}(t') + U_{\downarrow\downarrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow}\gamma_{i\mathbf{k}}(t')\gamma^{\dagger}_{j\mathbf{q}}(t')\Big\} + h.c.\Big]\,.\end{aligned} \tag{5.26}$$

Le calcul détaillé de (5.23) au moyen de (5.25) et (5.26) est donné à l'annexe I. Il en résulte que le courant de moment magnétique alterné est donné par l'expression

$$\dot{\mathbf{S}}_G(t) = \big(I_c + J_c\cos\Delta\varphi\big)\hat{s}_D \times \hat{s}_G\ , \tag{5.27}$$

où

$$\begin{aligned}I_c = \frac{1}{N^2}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{q}\\ i,j}}|t_{\mathbf{kq}}|^2\Bigg[\Big[(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow})^2 + (\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow})^2\Big]\mathrm{P}\bigg(\frac{f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}} - E^i_{\mathbf{k}}}\bigg) \\ + \Big[(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow})^2 + (\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow})^2\Big]\mathrm{P}\bigg(\frac{1 - f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}} + E^i_{\mathbf{k}}}\bigg)\Bigg]\end{aligned} \tag{5.28}$$

et

$$J_c = \frac{1}{N^2}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{q}\\ i,j}}|t_{\mathbf{kq}}|^2\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow}\,\mathrm{P}\Bigg[\frac{f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}} - E^i_{\mathbf{k}}} + \frac{1 - f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}} + E^i_{\mathbf{k}}}\Bigg]\ . \tag{5.29}$$

L'expression (5.27) pour le courant de moment magnétique alterné est très similaire à celle obtenue en l'absence de supraconductivité (c'est-à-dire avec seulement l'hamiltonien ODS). À nouveau, le courant est proportionnel au produit vectoriel des moments magnétiques alternés de part et d'autre de la jonction.

La distinction la plus remarquable cependant est l'apparition d'un terme proportionnel à l'énergie Josephson ($\sim\cos\Delta\varphi$) dans l'expression du courant critique. Le courant de moment magnétique alterné n'est plus uniquement véhiculé par le transfert tunnel de paires particule-trou, mais aussi par le transfert tunnel de paires de Cooper. Il ressort en effet du calcul présenté à l'annexe I que la contribution au courant qui est proportionnelle à $J_c\cos\Delta\varphi$ tire son origine de termes d'appariement non-conventionnels de la forme $\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}}c^{\dagger}_{\mathbf{k}}d_{\mathbf{q}}d_{\mathbf{q}}\rangle$ qui sont nuls en l'absence de supraconductivité. La contribution proportionnelle à I_c tire quant à elle son origine de termes de la forme $\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k+Q}}c_{\mathbf{k}}d^{\dagger}_{\mathbf{q}}d_{\mathbf{q+Q}}\rangle$

qui correspondent au transfert de paires particule-trou ayant un vecteur d'onde égal au vecteur d'onde antiferromagnétique.

5.4 Courant Josephson supraconducteur

Dans les dérivations microscopiques habituelles du courant Josephson standard, on définit communément le courant comme la dérivée temporelle du nombre de particules à gauche de la jonction tunnel,

$$\dot{N}_G \equiv \langle d\hat{N}_G/dt\rangle = (1/i\hbar)\langle[\hat{N}_G, \hat{H}_T]\rangle \ , \tag{5.30}$$

où $\hat{N}_G = \sum_{\mathbf{k}\sigma} c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma}$. Cette définition est appropriée dans le cas où la jonction n'est pas reliée à un circuit. En calculant le commutateur dans (5.30), on obtient

$$\dot{N}_G(t) = \frac{2}{N\hbar}\sum_{\mathbf{kq}}\sum_{\alpha\beta}\mathrm{Im}\Big[t_{\mathbf{kq}} U_{\alpha\beta}\langle c^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}(t) d_{\mathbf{q}\beta}(t)\rangle\Big] \ . \tag{5.31}$$

Exprimé dans la représentation des opérateurs propres $\gamma_{i\mathbf{k}}$ de $\hat{H}_{CM}$, (5.31) s'écrit

$$\begin{aligned}\dot{N}_G(t) = \frac{2}{N\hbar}\sum_{\mathbf{kq}}\sum_{\alpha\beta}\sum_{ij}\mathrm{Im}\Big[t_{\mathbf{kq}}\Big\{ & U_{\uparrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\langle\gamma^\dagger_{i\mathbf{k}}(t)\gamma_{j\mathbf{q}}(t)\rangle + U_{\uparrow\downarrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow}\langle\gamma^\dagger_{i\mathbf{k}}(t)\gamma^\dagger_{j\mathbf{q}}(t)\rangle \\ & + U_{\downarrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow}\langle\gamma_{i\mathbf{k}}(t)\gamma_{j\mathbf{q}}(t)\rangle + U_{\downarrow\downarrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow}\langle\gamma_{i\mathbf{k}}(t)\gamma^\dagger_{j\mathbf{q}}(t)\rangle\Big\}\Big] \ .\end{aligned} \tag{5.32}$$

À nouveau, les valeurs moyennes dans (5.32) sont évaluées en réponse linéaire selon la formule (5.25) avec l'hamiltonien tunnel $\hat{H}_T$ exprimé lui aussi dans la représentation des opérateurs propres de $\hat{H}_{CM}$ comme à l'équation (5.26). Le calcul détaillé est présenté à l'annexe J et donne

$$\dot{N}_G(t) = \big(\bar{I}_c + \bar{J}_c\cos\theta\big)\sin\Delta\varphi \ , \tag{5.33}$$

avec

$$\bar{I}_c \equiv \frac{2}{N^2\hbar}\sum^{*}_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{q}\\ i,j}} |t_{\mathbf{kq}}|^2\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow}\,\mathrm{P}\left[\frac{f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}} - E^i_{\mathbf{k}}} - \frac{1 - f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}} + E^i_{\mathbf{k}}}\right] \ , \tag{5.34}$$

et

$$\bar{J}_c \equiv \frac{2}{N^2\hbar} \sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{q} \\ i,j}}^{*} |t_{\mathbf{kq}}|^2 \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow} \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} \, \mathrm{P}\left[\frac{f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}} - E^i_{\mathbf{k}}} + \frac{1 - f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}} + E^i_{\mathbf{k}}} \right] . \tag{5.35}$$

5.5 Discussion

L'influence réciproque de l'antiferromagnétisme et de la supraconductivité est manifeste aussi bien dans le courant de spin (5.27) que dans le courant de charge (5.33). On remarque d'ailleurs une symétrie intéressante entre les deux expressions. Il serait probablement plus facile de réaliser des mesures expérimentales en ce qui concerne le courant de charge. En effet, il apparaît possible de varier l'intensité du courant critique d'une façon bien définie en modifiant l'orientation relative des moments magnétiques alternés de part et d'autre de la jonction. Ceci serait peut-être réalisable en appliquant des champs magnétiques différents de chaque côté de la jonction tout en s'assurant qu'ils soient d'intensité suffisamment faible pour ne pas détruire la supraconductivité. Évidemment, la rotation des moments devrait se faire de façon adiabatique de sorte que le système puisse être considéré approximativement en équilibre thermodynamique à chaque instant. Notre prédiction pourrait alors être vérifiée en mesurant le courant critique à $eV = 0$ pour différentes orientations relatives θ.

Par ailleurs, à la lumière des résultats (5.27) pour le courant de moment magnétique alterné et (5.33) pour le courant supraconducteur, nous pouvons conclure, d'un point de vue à la Ginzburg-Landau, que la fonctionnelle d'énergie libre contient un terme proportionnel à

$$I'_c \mathbf{S}_G \cdot \mathbf{S}_D + \bar{I}'_c \cos\Delta\varphi + J'_c \mathbf{S}_G \cdot \mathbf{S}_D \cos\Delta\varphi \,, \tag{5.36}$$

où le prime signifie que l'on a divisé par $|\mathbf{S}_G||\mathbf{S}_D|$. Cependant, pour que (5.36) soit valable, il faudrait avoir $\bar{J}_c = J_c$, alors que d'après l'expression (5.29) pour J_c et (5.35) pour $\bar{J}_c$ nous trouvons plutôt $\bar{J}_c = (2/\hbar)J_c$. Mais ceci n'est qu'une question d'unités. Il suffit en effet de définir le courant de moment magnétique alterné par la quantité $(2/\hbar)\dot{\mathbf{S}}_G$ pour obtenir (5.36).

Pour terminer, il est intéressant de souligner que le terme au quatrième ordre en paramètres d'ordre dans la fonctionnelle d'énergie libre (c'est-à-dire le troisième terme dans l'expression (5.36)) est au deuxième ordre dans l'amplitude de saut tunnel $|t_{\mathbf{kq}}|$, ce qui n'aurait pu être déduit d'une approche Ginzburg-Landau pure.

Conclusion

L'effet Josephson généralisé repose sur l'idée qu'une variation du paramètre d'ordre à travers une jonction tunnel entre deux matériaux présentant une même symétrie brisée[1] entraîne l'effet tunnel cohérent des objets qui sont condensés dans l'état avec symétrie brisée. Dans cette perspective, nous avons étudié l'effet Josephson de spin à travers une jonction tunnel entre deux antiferroaimants itinérants présentant un ordre magnétique non-colinéaire. À cette fin, nous avons adopté une approche microscopique analogue à celle utilisée par Ambegaokar & Baratoff dans le calcul de l'effet Josephson standard entre deux supraconducteur BCS. Ce calcul microscopique montre la généralité des effets Josephson (comme dans Esposito & al. [29]) et permet d'identifier les objets physiques à l'origine du phénomène (paires particule-trou) ainsi que la façon de le détecter. Notre résultat diffère cependant de celui obtenu par Esposito & al. puisque ceux-ci n'ont pas écrit les bonnes équations du mouvement[2]. On s'attend par ailleurs à ce que le phénomène soit robuste car, tout comme l'effet Josephson, il est relié à la rigidité d'une symétrie brisée. Une autre analogie vient de la possibilité de faire un changement de jauge (ici choix du système de coordonnées de part et d'autre de la jonction) qui reporte tout ce qui est relié à la différence des paramètres d'ordre sur les intégrales de saut représentant l'effet tunnel.

[1] Plus généralement, la symétrie brisée de l'un doit être un sous-groupe de la symétrie brisée de l'autre. Un exemple de cela est la cas d'une jonction tunnel AF/I/FM dont nous avons discuté à la section 2.3.

[2] La raison de ceci étant que les auteurs ont négligé d'inclure le terme lié à la phase de Berry dans leur Lagrangien effectif. Une façon correcte de tenir compte de cette contribution est présentée au chapitre VI.5 du manuel de Zee [51]

Afin de décrire l'antiferromagnétisme itinérant, nous avons utilisé un modèle de Hubbard à une bande dans l'approximation Hartree-Fock pour une onde de densité de spin statique de vecteur d'onde $\mathbf{Q} = (\pi, \pi)$. L'état fondamental de l'hamiltonien champ-moyen consiste en un condensat de paires particule-trou d'impulsion totale $\mathbf{Q}$ et de spin 1 dans l'état triplet avec projection nulle selon l'axe de quantification. Le courant Josephson de spin, défini comme le taux de variation instantané du moment magnétique alterné $\mathbf{S}_G$ de l'AF gauche, est le résultat de l'effet tunnel cohérent de ces paires particule-trou à travers la jonction.

Un calcul perturbatif au deuxième ordre dans l'amplitude tunnel montre que le courant Josephson de spin $\mathbf{I}_S$ à travers la jonction est donné par $\mathbf{I}_S = I_c \hat{\mathbf{s}}_G \times \hat{\mathbf{s}}_D$. La dépendance en $\sin \Delta\varphi$, propre au courant Josephson standard, est donc remplacée ici par le produit vectoriel des moments magnétiques alternés de part et d'autre de la jonction. Ceci implique physiquement que $\mathbf{S}_G$ et $\mathbf{S}_D$ précessent l'un par rapport à l'autre ou, plus précisément, par rapport à leur somme $\mathbf{\Sigma} \equiv \mathbf{S}_G + \mathbf{S}_D$. La fréquence de ce mouvement de précession est donnée par $\omega_0 = I_c|\mathbf{S}_G + \mathbf{S}_D|/(|\mathbf{S}_G||\mathbf{S}_D|)$. De plus, dans l'approximation d'Ambegaokar & Baratoff, la dépendance en température du courant critique I_c est identique à celle obtenue par ces derniers pour un supraconducteur BCS, ce qui s'explique par le fait que le traitement ODS est formellement identique au traitement BCS, malgré qu'il ne fasse intervenir que le degré de liberté de spin. Nous avons également proposé de comparer la résonnance magnétique d'un ferroaimant (itinérant) dans une jonction AF/I/FM et dans une double jonction AF/I/AF/I/FM afin de détecter expérimentalement l'effet Josephson de spin entre deux antiferroaimants (itinérants).

L'analogue de l'effet Josephson AC dans les jonctions tunnel magnétiques s'obtient en présence d'une différence de champ magnétique à travers la jonction. L'application d'un champ magnétique uniforme $\mathbf{B}$ de part et d'autre de la jonction entraîne un mouvement de double précession : $\mathbf{S}_G$ et $\mathbf{S}_D$ précesse autour de leur somme $\mathbf{\Sigma}$ pendant que celle-ci précesse autour de $\mathbf{B}$. Lorsque $\mathbf{B}_G \neq \mathbf{B}_D$, l'angle relatif θ entre les deux moments acquiert une dépendance temporelle (tout comme dans le cas standard où la différence de phase dépend linéairement du temps en présence d'une différence de potentiel électrique à travers la jonction). Dans le cas où le champ s'annule d'un côté de la jonction (par exemple, $\mathbf{B}_G = 0$ et $\mathbf{B}_D = \Delta\mathbf{B}$), l'angle θ évolue de façon quasi-sinusoïdale. En présence d'un champ uniforme additionnel ($\mathbf{B}_G = \mathbf{B}_0$ et $\mathbf{B}_D = \mathbf{B}_0 + \Delta\mathbf{B}$), un battement s'ajoute à ce comportement quasi-sinusoïdal.

Nous avons ensuite reconsidéré la cas d'une jonction tunnel entre deux antiferroaimants itinérants, mais en allant au-delà de la réponse linéaire dans le calcul du courant de spin. Pour ce faire, nous avons utilisé la méthode des *self-énergies de contact*. Dans la limite d'une faible transparence tunnel, le résultat obtenu permet de retrouver la forme $\sim \mathbf{S}_G \times \mathbf{S}_D$ du courant de spin obtenu en réponse linéaire.

Finalement, nous avons considéré une jonction tunnel entre deux matériaux dans lequels un ordre antiferromagnétique commensurable coexiste avec la supraconductivité de type d. Au niveau champ moyen, un calcul en réponse linéaire du courant Josephson de spin montre que le courant critique est modulé par l'énergie Josephson $E_J \propto \cos\Delta\varphi$ où $\Delta\varphi$ est la différence de phase entre les paramètres d'ordre supraconducteurs de part et d'autre de la jonction. D'une façon tout à fait symétrique, la calcul du courant Josephson de charge montre que le courant critique (de charge) est modulé par l'énergie d'échange entre les moments magnétiques de gauche et de droite $E_{\text{éch}} \propto \mathbf{S}_G \cdot \mathbf{S}_D \propto \cos\theta$ où θ est l'orientation relative entre les deux moments. De ces résultats, il est possible de conclure que la fonctionnelle d'énergie libre contient un terme de la forme $A\,\mathbf{S}_G \cdot \mathbf{S}_D + B\,\cos\Delta\varphi + C\,\mathbf{S}_G \cdot \mathbf{S}_D \cos\Delta\varphi$ où les coefficients A, B et C dépendent de la température. Notons que le terme au quatrième ordre en paramètres d'ordre dans la fonctionnelle est au deuxième ordre dans l'amplitude de saut tunnel $|t_{\mathbf{kq}}|$, ce qui n'aurait pu être déduit d'une approche Ginzburg-Landau pure. Par ailleurs, mentionnons que dans le cas où la phase AF et la phase SC sont séparées spatialement dans le composé plutôt que de coexister de façon homogène, l'effet Josephson de spin n'est pas influencé par l'effet Josephson standard et vice-versa. Ceci pourrait fournir un moyen de détecter de façon macroscopique la différence entre ces deux situations.

Pour terminer, il convient de mentionner certaines perspectives de recherche pour de futurs travaux. Naturellement, il serait intéressant de poursuivre l'étude de l'effet Josephson généralisé dans des systèmes présentant d'autre type de coexistence de symétries brisées. Cette avenue offre un vaste évantail de possibilités : ordre magnétique et supraconductivité de type p, ordre magnétique et interaction spin-orbite (laquelle implique une brisure de la symétrie sous renversement du temps), etc.

Une autre suite intéressante à ce projet consisterait à étudier l'effet Josephson de spin à travers une jonction AF/N/AF où AF dénote un antiferroaimant itinérant et N, une couche de métal normal. Dans le cas standard d'une jonction SC/N/SC, il est bien connu que la dépendance du courant Josephson sur la différence de phase $\Delta\varphi$ entre les deux paramètres d'ordre supraconducteurs diffère considérablement de la fonction sinus caractéristique d'une jonction SC/I/SC. Par exemple, Ishii (1970) a démontré que pour une couche épaisse de métal normal, le courant Josephson à $T = 0$ est une fonction en *dents de scie* de $\Delta\varphi$ de période 2π et discontinue à chaque multiple impair de π [52].

Le fait que les états liés d'Andreev dans la région N jouent un rôle crucial dans le processus physique à l'origine du courant Josephson à travers une jonction SC/N/SC a été amplement souligné dans la littérature (voir par exemple [53]). Ces états liés, dont les niveaux d'énergies dépendent de $\Delta\varphi$, sont le résultat d'une superposition cohérente de quasi-électrons et de quasi-trous subissant des rétroréflexions d'Andreev aux interfaces N/SC. Le phénomène de la réflexion d'Andreev consiste en ce qu'un quasi-électron (quasi-trou) provenant de la région N avec une vitesse $\mathbf{v}$ et une énergie $E < \Delta$, où Δ est le gap, ne peut pénétrer dans la région SC. Il peut toutefois être transformé à l'interface en un quasi-trou (quasi-électron) de vitesse $-\mathbf{v}$, lequel transporte le même courant dans la même direction[3]. En terme de particules, ceci signifie qu'un électron au-dessus du niveau de Fermi dans le métal normal forme une paire de Cooper avec un autre électron (sous le niveau de Fermi) et se joint au condensat supraconducteur. Le trou qui est

[3]Contrairement aux processus de réflexion habituels, la réflexion d'Andreev change donc simultanément toutes les composantes de la vitesse de la quasiparticule incidente.

réfléchi à l'interface est le trou laissé par le second électron dans la mer de Fermi. Dans le processus conjugué, une paire de Cooper se précipite sur un trou qui se propage trop près de l'interface dans la région N ; un électron de la paire comble alors le trou et l'autre s'éloigne dans la région normale. La réflexion d'Andreev fournit ainsi un mécanisme permettant au courant de circuler à travers l'interface N/SC.

Dans le cas d'une interface N/AF, à présent, des arguments de nature théorique portent à croire qu'un processus de réflexion de type Andreev existe. En effet, un électron provenant de la région N avec un vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et une énergie $E < \Delta$, où Δ est le gap antiferromagnétique, ne pourra pas pénétrer dans la région AF et sera réfléchi avec un vecteur d'onde $\mathbf{k} + \mathbf{Q}$, ce qui est équivalent à la transmission d'une paire particule-trou. Bobkova & al. réfèrent à ce processus sous le vocable de *réflexion*-$\mathbf{Q}$. Ils ont par ailleurs montré qu'il en résulte l'existence d'états liés dans une jonction AF/N/AF avec un spectre d'énergie formellement identique à celui des états liés d'Andreev dans une jonction SC/N/SC [35]. Toutefois, ces auteurs n'ont traité que le cas où les moments des deux AF sont colinéaires et n'ont pas considéré la possibilité que ces états liés puissent générer un courant Josephson de spin.

Il serait donc intéressant d'étudier la forme de ces états liés de type Andreev lorsque les moments magnétiques alternés de part et d'autre de la région N sont non-colinéaires. Il s'agirait ensuite de vérifier s'il en découle un courant de spin à travers la jonction.

Annexe A

L'hamiltonien champ moyen ODS

Dans cette annexe, nous donnons la dérivation de l'hamiltonien champ moyen ODS énoncé à l'équation (1.15) du chapitre 2.

On commence avec l'hamiltonien de Hubbard à une bande

$$\hat{H} = \sum_{i,j} t_{ij}(c_i^\dagger c_j + c_j^\dagger c_i) + U \sum_i \hat{n}_{i\uparrow}\hat{n}_{i\downarrow} \tag{A.1}$$

où t_{ij} est l'amplitude tunnel entre les sites i et j, $\hat{n}_{i\sigma}$ est l'opérateur nombre de particules de spin σ au site i et U est l'interaction locale. L'approximation *champ moyen* consiste à récrire $\hat{n}_{i\sigma}$ comme la somme de sa valeur moyenne $\langle \hat{n}_{i\sigma}\rangle$ et d'une déviation $\delta_{i\sigma} \equiv \hat{n}_{i\sigma} - \langle \hat{n}_{i\sigma}\rangle$ puis à négliger les contributions au deuxième ordre en $\delta_{i\sigma}$. Le terme d'interaction dans (A.1) se récrit donc (en négligeant à chaque étape les termes constants)

$$\begin{aligned}
U \sum_i \hat{n}_{i\uparrow}\hat{n}_{i\downarrow} &= U \sum_i \left[\delta_{i\uparrow} + \langle \hat{n}_{i\uparrow}\rangle\right]\left[\delta_{i\downarrow} + \langle \hat{n}_{i\downarrow}\rangle\right] \\
&= U \sum_i \left[\delta_{i\uparrow}\langle \hat{n}_{i\downarrow}\rangle + \langle \hat{n}_{i\uparrow}\rangle\delta_{i\downarrow} + O(\delta^2)\right] \\
&= U \sum_i \left[(\hat{n}_{i\uparrow} - \langle \hat{n}_{i\uparrow}\rangle)\langle \hat{n}_{i\downarrow}\rangle + \langle \hat{n}_{i\uparrow}\rangle(\hat{n}_{i\downarrow} - \langle \hat{n}_{i\downarrow}\rangle)\right] \\
&= U \sum_i \left[\hat{n}_{i\uparrow}\langle \hat{n}_{i\downarrow}\rangle + \langle \hat{n}_{i\uparrow}\rangle\hat{n}_{i\downarrow}\right] .
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Dans l'état à symétrie brisée, le système est caractérisé par la présence d'une onde de densité de spin statique d'amplitude S et de vecteur d'onde $\mathbf{Q}$. Dans le cas particulier

$\mathbf{Q} = (\pi, \pi, \pi)$, le réseau est *bipartite*, ce qui signifie qu'il se compose de deux sous-réseaux : un sous-réseau A d'aimantation $S = \langle \hat{n}_{a\uparrow} - \hat{n}_{a\downarrow} \rangle$ ($\forall\, a \in A$) et un sous-réseau B d'aimantation $-S = \langle \hat{n}_{b\uparrow} - \hat{n}_{b\downarrow} \rangle$ ($\forall\, b \in B$). En posant $n \equiv \langle \hat{n}_i \rangle = \langle \hat{n}_{i\uparrow} + \hat{n}_{i\downarrow} \rangle$ on peut écrire

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_{a\uparrow(\downarrow)} \rangle &= \frac{n}{2} \pm \frac{S}{2} \\ \langle \hat{n}_{b\uparrow(\downarrow)} \rangle &= \frac{n}{2} \mp \frac{S}{2} \,. \end{aligned} \tag{A.3}$$

En substituant (A.3) dans (A.2), on trouve (en négligeant encore les termes constants à chaque étape)

$$\begin{aligned} &U \sum_{a\in A} \left[\hat{n}_{a\uparrow} \langle \hat{n}_{a\downarrow} \rangle + \langle \hat{n}_{a\uparrow} \rangle \hat{n}_{a\downarrow} \right] + U \sum_{b\in B} \left[\hat{n}_{b\uparrow} \langle \hat{n}_{b\downarrow} \rangle + \langle \hat{n}_{b\uparrow} \rangle \hat{n}_{b\downarrow} \right] \\ =&U \sum_{a\in A} \left[\hat{n}_{a\uparrow} (\frac{n}{2} - \frac{S}{2}) + (\frac{n}{2} + \frac{S}{2}) \hat{n}_{a\downarrow} \right] + U \sum_{b\in B} \left[\hat{n}_{b\uparrow} (\frac{n}{2} + \frac{S}{2}) + (\frac{n}{2} - \frac{S}{2}) \hat{n}_{b\downarrow} \right] \\ =&U \sum_{a\in A} \left[\frac{n}{2} (\hat{n}_{a\uparrow} + \hat{n}_{a\downarrow}) - \frac{S}{2} (\hat{n}_{a\uparrow} - \hat{n}_{a\downarrow}) \right] + U \sum_{b\in B} \left[\frac{n}{2} (\hat{n}_{b\uparrow} + \hat{n}_{b\downarrow}) + \frac{S}{2} (\hat{n}_{b\uparrow} - \hat{n}_{b\downarrow}) \right] . \end{aligned} \tag{A.4}$$

On remarque que le terme $\sum_{a\in A} (n/2)(\hat{n}_{a\uparrow} + \hat{n}_{a\downarrow}) = (n/2) \sum_{a\in A} \hat{n}_a$ s'additionne au terme $\sum_{b\in B} (n/2)(\hat{n}_{b\uparrow} + \hat{n}_{b\downarrow}) = (n/2) \sum_{b\in B} \hat{n}_b$ pour donner $(n/2) \sum_i \hat{n}_i = (n/2)\hat{N}$ où $\hat{N}$ est l'opérateur du nombre total de particules. Comme ce nombre est supposé constant, nous négligerons ce terme (ou encore, on l'utilise pour redéfinir le potentiel chimique). En supposant que l'origine est comprise dans le sous-réseau A, l'expression (A.4) peut se récrire

$$\begin{aligned} &- \frac{US}{2} \left[\sum_{a\in A} (\hat{n}_{a\uparrow} - \hat{n}_{a\downarrow}) - \sum_{b\in B} (\hat{n}_{b\uparrow} - \hat{n}_{b\downarrow}) \right] \\ &= -\frac{US}{2} \left[\sum_{a\in A} (c^\dagger_{a\uparrow} c_{a\uparrow} - c^\dagger_{a\downarrow} c_{a\downarrow}) - \sum_{b\in B} (c^\dagger_{b\uparrow} c_{b\uparrow} - c^\dagger_{b\downarrow} c_{b\downarrow}) \right] \\ &= -\frac{US}{2} \sum_i \mathrm{e}^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}_i} (c^\dagger_{i\uparrow} c_{i\uparrow} - c^\dagger_{i\downarrow} c_{i\downarrow}) && \text{(A.5)} \\ &= -\frac{US}{2} \sum_i \mathrm{e}^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}_i} c^\dagger_{i\alpha} \sigma^3_{\alpha\beta} c_{i\beta} && \text{(A.6)} \end{aligned}$$

où σ^3 est la troisième matrice de Pauli. En prenant la transformée de Fourier, on obtient finalement

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \epsilon_{\mathbf{k}} c^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha} c_{\mathbf{k}\alpha} - \frac{US}{2} \sum_{\mathbf{k}\alpha\beta} c^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha} \sigma^{3}_{\alpha\beta} c_{\mathbf{k}\beta} \ . \tag{A.7}$$

Annexe B

Calcul des facteurs de cohérence

Dans cette annexe, nous dérivons les facteurs de cohérence définis à l'équation (2.26) du chapitre 3 et qui interviennent dans le calcul du courant Josephson DC de moment magnétique alterné.

On récrit d'abord le membre gauche du commutateur dans l'équation (2.9) en réduisant la somme sur $\mathbf{k}$ et $\mathbf{q}$ à la première zone de Brillouin magnétique :

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{kq}} t_{\mathbf{kq}}\, c^\dagger_{\mathbf{k+Q}\alpha} d_{\mathbf{q}\delta} = \sum_{\mathbf{kq}}^{*} \Big\{ & t_{\mathbf{kq}}\, c^\dagger_{\mathbf{k+Q}\alpha} d_{\mathbf{q}\delta} + t_{\mathbf{k+Qq}}\, c^\dagger_{\mathbf{k}\alpha} d_{\mathbf{q}\delta} \\ & + t_{\mathbf{kq+Q}}\, c^\dagger_{\mathbf{k+Q}\alpha} d_{\mathbf{q+Q}\delta} + t_{\mathbf{k+Qq}}\, c^\dagger_{\mathbf{k}\alpha} d_{\mathbf{q+Q}\delta} \Big\} \ .\end{aligned} \tag{B.1}$$

En supposant $t_{\mathbf{kq}} = t_{\mathbf{kq+Q}} = t_{\mathbf{k+Qq}} = t_{\mathbf{k+Qq+Q}}$, on obtient

$$\sum_{\mathbf{kq}}^{*} t_{\mathbf{kq}} \Big\{ c^\dagger_{\mathbf{k+Q}\alpha} d_{\mathbf{q}\delta} + c^\dagger_{\mathbf{k}\alpha} d_{\mathbf{q}\delta} + c^\dagger_{\mathbf{k+Q}\alpha} d_{\mathbf{q+Q}\delta} + c^\dagger_{\mathbf{k}\alpha} d_{\mathbf{q+Q}\delta} \Big\} \ . \tag{B.2}$$

En utilisant l'inverse de la transformation de Bogoliubov (1.16),

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{k}\alpha} &= u_{\mathbf{k}} \gamma^c_{\mathbf{k}\alpha} + v_{\mathbf{k}} \gamma^v_{\mathbf{k}\alpha} \ , \\ c_{\mathbf{k+Q},\alpha} &= \sigma^3_{\alpha\alpha} \big(v_{\mathbf{k}} \gamma^c_{\mathbf{k}\alpha} - u_{\mathbf{k}} \gamma^v_{\mathbf{k}\alpha} \big) \ , \end{aligned} \tag{B.3}$$

l'expression entre accolades dans (B.2) devient

$$\begin{aligned}
&\sigma^3_{\alpha\alpha}\big(v_{\mathbf{k}}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{k}\alpha} - u_{\mathbf{k}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\big)\big(u_{\mathbf{q}}\gamma^{c}_{\mathbf{q}\delta} + v_{\mathbf{q}}\gamma^{v}_{\mathbf{q}\delta}\big)\\
&+\big(u_{\mathbf{k}}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{k}\alpha} + v_{\mathbf{k}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\big)\big(u_{\mathbf{q}}\gamma^{c}_{\mathbf{q}\delta} + v_{\mathbf{q}}\gamma^{v}_{\mathbf{q}\delta}\big)\\
&+\sigma^3_{\alpha\alpha}\sigma^3_{\delta\delta}\big(v_{\mathbf{k}}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{k}\alpha} - u_{\mathbf{k}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\big)\big(v_{\mathbf{q}}\gamma^{c}_{\mathbf{q}\delta} - u_{\mathbf{q}}\gamma^{v}_{\mathbf{q}\delta}\big)\\
&+\sigma^3_{\delta\delta}\big(u_{\mathbf{k}}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{k}\alpha} + v_{\mathbf{k}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\big)\big(v_{\mathbf{q}}\gamma^{c}_{\mathbf{q}\delta} - u_{\mathbf{q}}\gamma^{v}_{\mathbf{q}\delta}\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^3_{\alpha\alpha}\big(v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{c}_{\mathbf{q}\delta} + v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{v}_{\mathbf{q}\delta} - u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{c}_{\mathbf{q}\delta} - u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{v}_{\mathbf{q}\delta}\big)\\
&+\big(u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{c}_{\mathbf{q}\delta} + u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{v}_{\mathbf{q}\delta} + v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{c}_{\mathbf{q}\delta} + v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{v}_{\mathbf{q}\delta}\big)\\
&+\sigma^3_{\alpha\alpha}\sigma^3_{\delta\delta}\big(v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{c}_{\mathbf{q}\delta} - v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{v}_{\mathbf{q}\delta} - u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{c}_{\mathbf{q}\delta} + u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{v}_{\mathbf{q}\delta}\big)\\
&+\sigma^3_{\delta\delta}\big(u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{c}_{\mathbf{q}\delta} - u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{v}_{\mathbf{q}\delta} + v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{c}_{\mathbf{q}\delta} - v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{v}_{\mathbf{q}\delta}\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\big(\sigma^3_{\alpha\alpha}v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}} + u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}} + \sigma^3_{\alpha\alpha}\sigma^3_{\delta\delta}v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}} + \sigma^3_{\delta\delta}u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}}\big)\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{c}_{\mathbf{q}\delta}\\
&+\big(\sigma^3_{\alpha\alpha}v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}} + u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}} - \sigma^3_{\alpha\alpha}\sigma^3_{\delta\delta}v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}} - \sigma^3_{\delta\delta}u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}\big)\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{v}_{\mathbf{q}\delta}\\
&+\big(-\sigma^3_{\alpha\alpha}u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}} + v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}} - \sigma^3_{\alpha\alpha}\sigma^3_{\delta\delta}u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}} + \sigma^3_{\delta\delta}v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}}\big)\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{c}_{\mathbf{q}\delta}\\
&+\big(-\sigma^3_{\alpha\alpha}u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}} + v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}} + \sigma^3_{\alpha\alpha}\sigma^3_{\delta\delta}u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}} - \sigma^3_{\delta\delta}v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}\big)\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{v}_{\mathbf{q}\delta}
\end{aligned}$$

$$\equiv(\Gamma^{\alpha\delta}_{\mathbf{kq}})_{cc}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{c}_{\mathbf{q}\delta} + (\Gamma^{\alpha\delta}_{\mathbf{kq}})_{cv}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{v}_{\mathbf{q}\delta} + (\Gamma^{\alpha\delta}_{\mathbf{kq}})_{vc}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{c}_{\mathbf{q}\delta} + (\Gamma^{\alpha\delta}_{\mathbf{kq}})_{vv}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\gamma^{v}_{\mathbf{q}\delta} \tag{B.4}$$

Maintenant récrivons le terme de droite du commutateur dans l'équation (2.9). Concentrons sur $\tilde{H}_T = (1/N)\sum_{\mathbf{kq}\sigma\sigma'} t^*_{\mathbf{kq}}\, d^\dagger_{\mathbf{q}\sigma'}U^\dagger_{\sigma'\sigma}c_{\mathbf{k}\sigma}$, la partie de $\hat{H}_T$ qui apporte une contribution non-nulle à la moyenne thermique du commutateur. En faisant les mêmes hypothèses sur les amplitudes tunnel, on obtient

$$\tilde{H}_T = (1/N)\sum_{\mathbf{kq}\sigma\delta} t^*_{\mathbf{kq}}U^\dagger_{\delta\sigma}\Big\{d^\dagger_{\mathbf{q}\delta}c_{\mathbf{k}\sigma} + d^\dagger_{\mathbf{q+Q}\delta}c_{\mathbf{k}\sigma} + d^\dagger_{\mathbf{q}\delta}c_{\mathbf{k+Q}\sigma} + d^\dagger_{\mathbf{q+Q}\delta}c_{\mathbf{k+Q}\sigma}\Big\} \tag{B.5}$$

Au moyen de la transformation de Bogoliubov inverse (B.3), l'expression entre accolade se récrit

$$
\begin{aligned}
&(u_q\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{q}} + v_{\mathbf{q}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{q}\delta})(u_{\mathbf{k}}\gamma^{c}_{\mathbf{k}\sigma} + v_{\mathbf{k}}\gamma^{v}_{\mathbf{k}\sigma})\\
&+\sigma^3_{\delta\delta}(v_{\mathbf{q}}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{q}\delta} - u_{\mathbf{q}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{q}\delta})(u_{\mathbf{k}}\gamma^{c}_{\mathbf{k}\sigma} + v_{\mathbf{k}}\gamma^{v}_{\mathbf{k}\sigma})\\
&+\sigma^3_{\sigma\sigma}(u_{\mathbf{q}}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{q}\delta} + v_{\mathbf{q}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{q}\delta})(v_{\mathbf{k}}\gamma^{c}_{\mathbf{k}\sigma} - u_{\mathbf{k}}\gamma^{v}_{\mathbf{k}\sigma})\\
&+\sigma^3_{\delta\delta}\sigma^3_{\sigma\sigma}(v_{\mathbf{q}}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{q}\delta} - u_{\mathbf{q}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{q}\delta})(v_{\mathbf{k}}\gamma^{c}_{\mathbf{k}\sigma} - u_{\mathbf{k}}\gamma^{v}_{\mathbf{k}\sigma})\\
&=(u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{c}_{\mathbf{k}\sigma} + v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{v}_{\mathbf{k}\sigma} + u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{c}_{\mathbf{k}\sigma} + v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{v}_{\mathbf{k}\sigma})\\
&+\sigma^3_{\delta\delta}(u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{c}_{\mathbf{k}\sigma} + v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{v}_{\mathbf{k}\sigma} - u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{c}_{\mathbf{k}\sigma} - v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{v}_{\mathbf{k}\sigma})\\
&+\sigma^3_{\sigma\sigma}(v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{c}_{\mathbf{k}\sigma} - u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{v}_{\mathbf{k}\sigma} + v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{c}_{\mathbf{k}\sigma} - u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{v}_{\mathbf{k}\sigma})\\
&+\sigma^3_{\delta\delta}\sigma^3_{\sigma\sigma}(v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{c}_{\mathbf{k}\sigma} - u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}}\gamma^{c\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{v}_{\mathbf{k}\sigma} - v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{c}_{\mathbf{k}\sigma} + u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}\gamma^{v\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{v}_{\mathbf{k}\sigma})\\
&=(u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}} + \sigma^3_{\sigma\sigma}v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}} + \sigma^3_{\delta\delta}u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}} + \sigma^3_{\sigma\sigma}\sigma^3_{\delta\delta}v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}})\ \gamma^{c\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{c}_{\mathbf{k}\sigma}\\
&+(v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}} - \sigma^3_{\sigma\sigma}u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}} + \sigma^3_{\delta\delta}v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}} - \sigma^3_{\sigma\sigma}\sigma^3_{\delta\delta}u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}})\ \gamma^{c\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{v}_{\mathbf{k}\sigma}\\
&+(u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}} + \sigma^3_{\sigma\sigma}v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}} - \sigma^3_{\delta\delta}u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}} - \sigma^3_{\sigma\sigma}\sigma^3_{\delta\delta}v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}})\ \gamma^{v\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{c}_{\mathbf{k}\sigma}\\
&+(v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}} - \sigma^3_{\sigma\sigma}u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{q}} - \sigma^3_{\delta\delta}v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}} + \sigma^3_{\sigma\sigma}\sigma^3_{\delta\delta}u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}})\ \gamma^{v\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{v}_{\mathbf{k}\sigma}\\
&=(\Gamma^{\sigma\delta}_{\mathbf{kq}})_{cc}\ \gamma^{c\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{c}_{\mathbf{k}\sigma} + (\Gamma^{\sigma\delta}_{\mathbf{kq}})_{vc}\ \gamma^{c\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{v}_{\mathbf{k}\sigma} + (\Gamma^{\sigma\delta}_{\mathbf{kq}})_{cv}\ \gamma^{v\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{c}_{\mathbf{k}\sigma} + (\Gamma^{\sigma\delta}_{\mathbf{kq}})_{vv}\ \gamma^{v\dagger}_{\mathbf{q}\delta}\gamma^{v}_{\mathbf{k}\sigma}
\end{aligned}
\tag{B.6}
$$

Annexe C

Expressions (2.37) et (2.38) pour le courant de moment magnétique alterné

Dans cette annexe, nous rendons explicite les détails de calcul nécessaire pour passer de l'équation (2.28) à l'expression finale du courant de spin Éq.(2.37).

En substituant (2.30) dans (2.28), on obtient

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{S}}_G(t) &= \frac{1}{N^2}\sum_{\mathbf{kq}}^{*}\sum_{\alpha\beta\delta}\sum_{\sigma\delta'}\mathrm{Im}\Bigg[-\frac{i}{\hbar}|t_{\mathbf{kq}}|^2\vec{\sigma}_{\alpha\beta}U_{\beta\delta}U^*_{\sigma\delta'}\int_{-\infty}^{t}dt'\mathrm{e}^{-0^+(t-t')}\times\\ &\qquad\sum_{ij}(\Gamma^{\alpha\delta}_{\mathbf{kq}})_{ij}(\Gamma^{\sigma\delta'}_{\mathbf{kq}})_{ij}(f(E^i_{\mathbf{k}})-f(E^j_{\mathbf{q}}))\mathrm{e}^{-i(E^j_{\mathbf{q}}-E^i_{\mathbf{k}})(t-t')/\hbar}\delta_{\sigma\alpha}\delta_{\delta\delta'}\Bigg]\\ &= \frac{1}{N^2}\sum_{\mathbf{kq}}^{*}\sum_{\alpha\beta\delta}\mathrm{Im}\Bigg[-\frac{i}{\hbar}|t_{\mathbf{kq}}|^2\vec{\sigma}_{\alpha\beta}U_{\beta\delta}U^*_{\alpha\delta}\int_{0}^{\infty}d(t-t')\times\\ &\qquad\sum_{ij}[(\Gamma^{\alpha\delta}_{\mathbf{kq}})_{ij}]^2(f(E^i_{\mathbf{k}})-f(E^j_{\mathbf{q}}))\mathrm{e}^{-i(E^j_{\mathbf{q}}-E^i_{\mathbf{k}}-i0^+)(t-t')/\hbar}\Bigg]\\ &= \frac{1}{N^2}\sum_{\mathbf{kq}}^{*}\sum_{\alpha\beta\delta}\mathrm{Im}\Bigg[|t_{\mathbf{kq}}|^2\vec{\sigma}_{\alpha\beta}U_{\beta\delta}U^*_{\alpha\delta}\sum_{ij}[(\Gamma^{\alpha\delta}_{\mathbf{kq}})_{ij}]^2\frac{f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}-E^i_{\mathbf{k}}-i0^+}\Bigg]\end{aligned} \tag{C.1}$$

où le symbole * en exposant de la matrice U dénote le conjugué complexe seulement (et non la transposée conjuguée). En utilisant la relation $1/(\omega \pm i0^+) = \mathrm{P}(1/\omega) \mp i\pi\delta(\omega)$ (où P dénote la partie principale) et en remarquant que la contribution du terme contenant la fonction delta de Dirac $\delta(E^j_{\mathbf{q}} - E^i_{\mathbf{k}})$ sera nulle en raison du facteur $(f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}}))$, l'expression précédente se récrit

$$\dot{\mathbf{S}}_G(t) = \frac{1}{N^2} \sideset{}{^*}\sum_{\mathbf{kq}} \sum_{ij} \left[|t_{\mathbf{kq}}|^2 \left(\sum_{\alpha\beta\delta} \mathrm{Im}\Big[\vec{\sigma}_{\alpha\beta} U_{\beta\delta} U^*_{\alpha\delta} [(\Gamma^{\alpha\delta}_{\mathbf{kq}})_{ij}]^2 \Big] \right) \mathrm{P} \frac{f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}} - E^i_{\mathbf{k}}} \right] \tag{C.2}$$

À présent, on procède à la somme sur les spins de l'expression entre parenthèses

$$\sum_{\alpha\beta\delta} \mathrm{Im}\Big[\sigma^u_{\alpha\beta} U_{\beta\delta} U^*_{\alpha\delta} [(\Gamma^{\alpha\delta}_{\mathbf{kq}})_{ij}]^2 \Big] \ . \tag{C.3}$$

Les résultats de cette somme pour chaque paire d'indices (i, j) avec $i, j \in \{c, v\}$ et pour chaque $u \in \{1, 2, 3\}$ sont présentés dans le tableau suivant :

$$\begin{pmatrix} & u=1 & u=2 & u=3 \\ (c,c): & 8u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}v_{\mathbf{q}} \sin\theta \sin\phi & -8u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}v_{\mathbf{q}} \sin\theta \cos\phi & 0 \\ (c,v): & -8u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}v_{\mathbf{q}} \sin\theta \sin\phi & 8u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}v_{\mathbf{q}} \sin\theta \cos\phi & 0 \\ (v,c): & -8u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}v_{\mathbf{q}} \sin\theta \sin\phi & 8u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}v_{\mathbf{q}} \sin\theta \cos\phi & 0 \\ (v,v): & 8u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}v_{\mathbf{q}} \sin\theta \sin\phi & -8u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}v_{\mathbf{q}} \sin\theta \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \tag{C.4}$$

En utilisant la définition des amplitudes de transformations Éq.(1.17), il est possible d'écrire

$$\begin{aligned} 8u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{q}}v_{\mathbf{q}} &= 8\sqrt{\frac{1}{2}\Big(1 + \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}}\Big)\frac{1}{2}\Big(1 - \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}}\Big)\frac{1}{2}\Big(1 + \frac{\epsilon_{\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{q}}}\Big)\frac{1}{2}\Big(1 - \frac{\epsilon_{\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{q}}}\Big)} \\ &= 2\sqrt{\Big(1 - \frac{\epsilon^2_{\mathbf{k}}}{E^2_{\mathbf{k}}}\Big)\Big(1 - \frac{\epsilon^2_{\mathbf{q}}}{E^2_{\mathbf{q}}}\Big)} \\ &= 2\frac{\Delta_G}{E_{\mathbf{k}}}\frac{\Delta_D}{E_{\mathbf{q}}} \ . \end{aligned} \tag{C.5}$$

Substituons maintenant (C.4) et (C.5) dans (C.2) et concentrons-nous sur la composante en $\hat{x}$ de $\dot{\mathbf{S}}_G$ (la composante en $\hat{y}$ s'obtenant de celle-ci en changeant $\sin\phi$ par $\cos\phi$ et en multipliant par un signe $-$) :

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{S}}_G^x(t) = \frac{2\Delta_G\Delta_D}{N^2}\sin\theta\sin\phi\,\mathrm{P}\sum_{\mathbf{kq}}^{*}\frac{|t_{\mathbf{kq}}|^2}{E_{\mathbf{k}}E_{\mathbf{q}}}\Bigg\{&\frac{f(E_{\mathbf{q}})-f(E_{\mathbf{k}})}{E_{\mathbf{q}}-E_{\mathbf{k}}} \\
&-\frac{f(-E_{\mathbf{q}})-f(E_{\mathbf{k}})}{-E_{\mathbf{q}}-E_{\mathbf{k}}}-\frac{f(E_{\mathbf{q}})-f(-E_{\mathbf{k}})}{E_{\mathbf{q}}+E_{\mathbf{k}}}+\frac{f(-E_{\mathbf{q}})-f(-E_{\mathbf{k}})}{-E_{\mathbf{q}}+E_{\mathbf{k}}}\Bigg\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{4\Delta_G\Delta_D}{N^2}\sin\theta\sin\phi\,\mathrm{P}\sum_{\mathbf{kq}}^{*}|t_{\mathbf{kq}}|^2\left\{\frac{f(E_{\mathbf{k}})-f(-E_{\mathbf{k}})}{E_{\mathbf{k}}(E_{\mathbf{k}}^2-E_{\mathbf{q}}^2)}+\frac{f(E_{\mathbf{q}})-f(-E_{\mathbf{q}})}{E_{\mathbf{q}}(E_{\mathbf{q}}^2-E_{\mathbf{k}}^2)}\right\} \quad \text{(C.6)}$$

$$= \frac{8\Delta_G\Delta_D}{N^2}\sin\theta\sin\phi\,\mathrm{P}\sum_{\mathbf{kq}}^{*}|t_{\mathbf{kq}}|^2\left\{\frac{f(E_{\mathbf{k}})-f(-E_{\mathbf{k}})}{E_{\mathbf{k}}(E_{\mathbf{k}}^2-E_{\mathbf{q}}^2)}\right\} \quad \text{(C.7)}$$

En se rappelant la définition de I_c donné à l'Éq.(2.38), on obtient donc

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{S}}_G^x(t) &= I_c\sin\theta\sin\phi\ , \\
\dot{\mathbf{S}}_G^y(t) &= -I_c\sin\theta\cos\phi\ , \\
\dot{\mathbf{S}}_G^z(t) &= 0
\end{aligned} \quad \text{(C.8)}$$

Comme nous avions défini, sans perte de généralité,

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_G &= |\mathbf{S}_G|(0,0,1) \\
\mathbf{S}_D &= |\mathbf{S}_D|(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)\ ,
\end{aligned}$$

l'expression (C.8) peut se récrire

$$\dot{\mathbf{S}}_G = I_c\,\hat{\mathbf{s}}_D\times\hat{\mathbf{s}}_G\ , \quad \text{(C.9)}$$

où $\hat{\mathbf{s}}_{G(D)} = \mathbf{S}_{G(D)}/|\mathbf{S}_{G(D)}|$.

Annexe D

L'origine géométrique du courant Josephson de spin

Dans cette section, nous présentons un calcul qui met en évidence l'origine géométrique de la dépendance du courant Josephson de spin (2.37) dans le produit vectoriel des deux moments. Dans ce qui suit nous traitons le cas d'une jonction tunnel entre deux ferroaimants, mais le raisonnement peut être généralisé à des antiferroaimants.

Nous allons recommencer le calcul du courant de spin dès le début. Cette fois, cependant, nous n'écrirons pas explicitement les transformations de jauge dans l'hamiltonien tunnel. Nous avons donc

$$\mathbf{I}_S \equiv \langle d\mathbf{M}_G/dt \rangle = \frac{1}{i\hbar}\left\langle \left[\mathbf{M}_G, \hat{H}_T\right]\right\rangle \tag{D.1}$$

où

$$\mathbf{M}_G = (\hbar/2)\sum_{\mathbf{k}\alpha\beta} c^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\vec{\sigma}_{\alpha\beta}c_{\mathbf{k}\beta} \tag{D.2}$$

$$\hat{H}_T = \sum_{\mathbf{kq}\sigma}\left(t_{\mathbf{kq}}c^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}d_{\mathbf{q}\sigma} + t^{*}_{\mathbf{kq}}d^{\dagger}_{\mathbf{q}\sigma}c_{\mathbf{k}\sigma}\right)\,, \tag{D.3}$$

et où les valeurs moyennes sont prises avec la matrice densité complète.

Un calcul direct nous donne

$$\mathbf{I}_S = -\frac{i}{2}\sum_{\substack{\mathbf{kq}\\ \alpha\beta}} \vec{\sigma}_{\alpha\beta}\big(t_{\mathbf{kq}}\big\langle c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} d_{\mathbf{q}\beta}\big\rangle - t^*_{\mathbf{kq}}\big\langle d^\dagger_{\mathbf{q}\alpha} c_{\mathbf{k}\beta}\big\rangle\big)\ . \tag{D.4}$$

On calcule les valeurs moyennes au premier ordre en $\hat{H}_T$ à l'aide de la formule de réponse linéaire (2.9). Ceci nous donne

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_S = -\frac{1}{2\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' e^{-0^+(t-t')} \sum_{\substack{\mathbf{kq}\\ \alpha\beta\sigma}} |t_{\mathbf{kq}}|^2 \Big\{ \\ \Big(\big\langle c^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}(t) c_{\mathbf{k}\sigma}(t')\big\rangle\ \vec{\sigma}_{\alpha\beta}\ \big\langle d_{\mathbf{q}\beta}(t) d^\dagger_{\mathbf{q}\sigma}(t')\big\rangle - \big\langle c_{\mathbf{k}\sigma}(t') c^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}(t)\big\rangle\ \vec{\sigma}_{\alpha\beta}\ \big\langle d^\dagger_{\mathbf{q}\sigma}(t') d_{\mathbf{q}\beta}(t)\big\rangle\Big) \\ -\Big(\big\langle c_{\mathbf{k}\beta}(t) c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}(t')\big\rangle\ \vec{\sigma}_{\alpha\beta}\ \big\langle d^\dagger_{\mathbf{q}\alpha}(t) d_{\mathbf{q}\sigma}(t')\big\rangle - \big\langle c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}(t') c_{\mathbf{k}\beta}(t)\big\rangle\ \vec{\sigma}_{\alpha\beta}\ \big\langle d_{\mathbf{q}\sigma}(t') d^\dagger_{\mathbf{q}\alpha}(t)\big\rangle\Big)\Big\}\ ,\end{aligned} \tag{D.5}$$

où $\langle ... \rangle$ dénote maintenant la valeur moyenne prise avec la matrice densité sans interaction. Nous allons à présent calculer les valeurs moyennes dans la base de spin non perturbée au temps t :

$$\begin{aligned}\big\langle c^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}(t) c_{\mathbf{k}\sigma}(t')\big\rangle = \sum_{n,m}\sum_{\hat{n}'_G \hat{m}'_G} e^{i(E_{n,\hat{n}_G} - E_{m,\hat{m}'_G})(t-t')/\hbar} \times \\ \big\langle n, \hat{n}_G | \rho\, \tilde{c}^\dagger_{\mathbf{k}\hat{n}'_G} U^\dagger_{\hat{n}'_G\alpha} | m, \hat{n}_G\big\rangle \big\langle m, \hat{n}_G | U_{\sigma\hat{m}'_G} \tilde{c}_{\mathbf{k}\hat{m}'_G} | n, \hat{n}_G\big\rangle\end{aligned} \tag{D.6}$$

où ρ est la matrice densité sans interaction, $|\hat{n}_G\rangle$ indique l'axe de quantification au temps t et où on a utilisé les relation (1.41) et (1.42) afin d'exprimer les opérateurs fermioniques dans la base de spin où le moment magnétique coïncide avec l'axe de quantification. On aura $E_{n,\hat{n}'_G} - E_{m,\hat{m}'_G} = \epsilon_{k\hat{n}'_G}$ car il y a une particule de plus dans $|n\rangle$ que dans $|m\rangle$ (on prend l'état à une particule champ moyen). Comme il n'y a qu'un seul état $|m'\rangle$ qui est connecté à $|n\rangle$ par $c_{\mathbf{k}}$, on peut factoriser l'exponentielle et prendre la somme sur les états intermédiaires :

$$\big\langle c^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}(t) c_{\mathbf{k}\sigma}(t')\big\rangle = \sum_{n,\hat{n}'_G} e^{i\epsilon_{k\hat{n}'_G}(t-t')/\hbar} U_{\sigma\hat{n}'_G} U^\dagger_{\hat{n}'_G\alpha} \big\langle n, \hat{n}_G | \rho\, \tilde{c}^\dagger_{\mathbf{k}\hat{n}'_G} \tilde{c}_{\mathbf{k}\hat{n}'_G} | n, \hat{n}_G\big\rangle \tag{D.7}$$

$$= \sum_{\hat{n}'_G} U_{\sigma\hat{n}'_G}\Big(e^{i\epsilon_{k\hat{n}'_G}(t-t')/\hbar}\, f_{\mathbf{k}\hat{n}'_G}\Big) U^\dagger_{\hat{n}'_G\alpha}\ . \tag{D.8}$$

Le terme entre parenthèses peut être vu comme une matrice

$$\begin{pmatrix} e^{i\epsilon_{k\uparrow}(t-t')/\hbar}\, f_{\mathbf{k}\uparrow} & 0 \\ 0 & e^{i\epsilon_{k\downarrow}(t-t')/\hbar}\, f_{\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{i\epsilon_{k\uparrow}(t-t')/\hbar}\, f_{\mathbf{k}\uparrow} + (\uparrow\leftrightarrow\downarrow) & 0 \\ 0 & e^{i\epsilon_{k\downarrow}(t-t')/\hbar}\, f_{\mathbf{k}\downarrow} + (\uparrow\leftrightarrow\downarrow) \end{pmatrix}$$
$$+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{i\epsilon_{k\uparrow}(t-t')/\hbar}\, f_{\mathbf{k}\uparrow} - (\uparrow\leftrightarrow\downarrow) & 0 \\ 0 & e^{i\epsilon_{k\downarrow}(t-t')/\hbar}\, f_{\mathbf{k}\downarrow} - (\uparrow\leftrightarrow\downarrow) \end{pmatrix} \tag{D.9}$$

Il n'y aura que la partie dépendante du spin qui contribuera. Donc, (D.8) se récrit ainsi

$$\left\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}(t)c_{\mathbf{k}\sigma}(t')\right\rangle = \sum_{\hat{n}'_G\hat{n}''_G} U_{\sigma\hat{n}'_G}\sigma^3_{\hat{n}'_G\hat{n}''_G}U^{\dagger}_{\hat{n}'_G\alpha}A_{\mathbf{k}}(t-t') \tag{D.10}$$

où

$$A_{\mathbf{k}}(t-t') = \frac{1}{2}\Big(e^{i\epsilon_{k\uparrow}(t-t')/\hbar}\, f_{\mathbf{k}\uparrow} - e^{i\epsilon_{k\downarrow}(t-t')/\hbar}\, f_{\mathbf{k}\downarrow}\Big)\ . \tag{D.11}$$

On peut simplifier (D.10) en utilisant la relation

$$\sum_{\hat{n}'_G\hat{n}''_G} U_{\sigma\hat{n}'_G}\sigma^3_{\hat{n}'_G\hat{n}''_G}U^{\dagger}_{\hat{n}'_G\alpha} = \hat{n}_G\cdot\vec{\sigma}_{\sigma\alpha} \tag{D.12}$$

que nous démontrons à l'instant. Il s'agit de la relation standard qui établit le lien entre $SU(2)$ et $SO(3)$. En utilisant la définition (1.33) de la matrice U, on a

$$U\hat{z}\cdot\vec{\sigma}U = U\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\phi/2}\cos(\theta/2) & e^{-i\phi/2}\sin(\theta/2) \\ -e^{i\phi/2}\sin(\theta/2) & e^{-i\phi/2}\cos(\theta/2)\end{pmatrix} \tag{D.13}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}\cos(\theta/2) & -e^{-i\phi/2}\sin(\theta/2) \\ e^{i\phi/2}\sin(\theta/2) & e^{i\phi/2}\cos(\theta/2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\phi/2}\cos(\theta/2) & e^{-i\phi/2}\sin(\theta/2) \\ e^{i\phi/2}\sin(\theta/2) & -e^{-i\phi/2}\cos(\theta/2)\end{pmatrix} \tag{D.14}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta/2)-\sin^2(\theta/2) & 2e^{-i\phi}\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) \\ 2e^{i\phi}\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) & \sin^2(\theta/2)-\cos^2(\theta/2)\end{pmatrix} \tag{D.15}$$

$$= \sin\theta\cos\phi\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \sin\theta\sin\phi\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} + \cos\theta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{D.16}$$

$$= \hat{n}_G\cdot\vec{\sigma}\ . \tag{D.17}$$

On peut donc récrire (D.10) de la façon suivante

$$\left\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}(t) c_{\mathbf{k}\sigma}(t')\right\rangle = \hat{n}_G \cdot \vec{\sigma}_{\sigma\alpha} A_{\mathbf{k}}(t-t') \tag{D.18}$$

De la même façon, il est facile de montrer que l'on peut écrire

$$\left\langle d_{\mathbf{q}\beta}(t) d^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}(t')\right\rangle = \hat{n}_D \cdot \vec{\sigma}_{\beta\sigma} B_{\mathbf{q}}(t-t') \tag{D.19}$$

où

$$B_{\mathbf{q}}(t-t') = \frac{1}{2}\Big(e^{-i\epsilon_{q\uparrow}(t-t')/\hbar}(1-f_{\mathbf{q}\uparrow}) - e^{-i\epsilon_{q\downarrow}(t-t')/\hbar}(1-f_{\mathbf{q}\downarrow})\Big) \ . \tag{D.20}$$

Avec (D.11), (D.18), (D.19) et (D.20) on peut récrire (D.21) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_S = -\frac{1}{2\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' e^{-0^+(t-t')} \sum_{\substack{\mathbf{kq}\\ \alpha\beta\sigma}} |t_{\mathbf{kq}}|^2 \Big\{ & \\
\Big(A_{\mathbf{k}}(t-t') B_{\mathbf{q}}(t-t')\, \hat{n}_G \cdot \vec{\sigma}_{\sigma\alpha}\, \vec{\sigma}_{\alpha\beta}\, \hat{n}_D \cdot \vec{\sigma}_{\beta\sigma} & \\
- B_{\mathbf{k}}(t'-t) A_{\mathbf{q}}(t'-t)\, \hat{n}_G \cdot \vec{\sigma}_{\sigma\alpha}\, \vec{\sigma}_{\alpha\beta}\, \hat{n}_D \cdot \vec{\sigma}_{\beta\sigma} \Big) & \\
- \Big(B_{\mathbf{k}}(t-t') A_{\mathbf{q}}(t-t')\, \hat{n}_G \cdot \vec{\sigma}_{\beta\sigma}\, \vec{\sigma}_{\alpha\beta}\, \hat{n}_D \cdot \vec{\sigma}_{\sigma\alpha} & \\
- A_{\mathbf{k}}(t'-t) B_{\mathbf{q}}(t'-t)\, \hat{n}_G \cdot \vec{\sigma}_{\beta\sigma}\, \vec{\sigma}_{\alpha\beta}\, \hat{n}_D \cdot \vec{\sigma}_{\sigma\alpha} \Big) \Big\} \ , &
\end{aligned} \tag{D.21}$$

On peut évaluer les traces sur les matrices de Pauli :

$$\mathrm{Tr}\big[(\hat{n}_G \cdot \vec{\sigma})\; \vec{\sigma}\; (\hat{n}_D \cdot \vec{\sigma})\big] = \mathrm{Tr}\big[(\hat{n}_G \cdot \vec{\sigma})\; (\hat{n}_D \cdot \vec{\sigma})\; \vec{\sigma}\big] \equiv \mathcal{T} \ . \tag{D.22}$$

Or, $(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) = \vec{a}\cdot\vec{b}\mathrm{I} + i(\vec{a}\vec{b})\cdot\vec{\sigma}$. De plus, $\mathrm{Tr}[\mathrm{I}] = 2$ et $\mathrm{Tr}[\vec{\sigma}] = 0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &= \mathrm{Tr}\Big[\big(\hat{n}_G \cdot \hat{n}_D\, \mathrm{I} + i(\hat{n}_G \times \hat{n}_D)\vec{\sigma}\big)\vec{\sigma}\Big] \\
&= 2i(\hat{n}_G \times \hat{n}_D)
\end{aligned} \tag{D.23}$$

En substituant (D.23) dans (D.21), on obtient finalement

$$\mathbf{I}_S = I_c\, \hat{n}_G \times \hat{n}_D \tag{D.24}$$

où le courant critique est donné par l'expression

$$\begin{aligned}
I_c = -\frac{i}{2\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' e^{-0^+(t-t')} \sum_{\mathbf{kq}} |t_{\mathbf{kq}}|^2 \Big\{ \Big(A_{\mathbf{k}}(t-t') B_{\mathbf{q}}(t-t') - B_{\mathbf{k}}(t'-t) A_{\mathbf{q}}(t'-t) & \\
- \Big(B_{\mathbf{k}}(t-t') A_{\mathbf{q}}(t-t') - A_{\mathbf{k}}(t'-t) B_{\mathbf{q}}(t'-t) \Big) \Big\} \ . &
\end{aligned} \tag{D.25}$$

Le calcul du courant critique donne le même résultat que celui obtenu par Wang & Chan [27] à un signe près (à cet effet, voir la discussion à la section 2.2).

Annexe E

Calcul perturbatif au 2^e ordre en $\hat{H}_T$ de l'état fondamental d'une jonction FM/I/FM

En l'absence de transfert tunnel d'électrons à travers la jonction, l'état fondamental du système est infiniment dégénéré puisqu'il est invariant sous l'action du groupe $U(1)\times U(1)$ des rotations indépendantes des moments magnétiques de chaque FM. L'hamiltonien tunnel $\hat{H}_T$ brise cette double symétrie en éliminant ses composantes hors diagonales, la réduisant ainsi au sous-groupe $U_D(1)$ des rotations simultanées des deux moments. Nous cherchons à déterminer s'il est alors favorable pour le système d'aligner ou d'anti-aligner les moments de part et d'autre de la jonction.

Au deuxième ordre en $\hat{H}_T$, la correction à l'énergie du fondamental est donnée par la formule bien connue

$$\Delta E = \sum_m \frac{\langle 0|\hat{H}_T|m\rangle\langle m|\hat{H}_T|0\rangle}{E_0 - E_m} \ , \tag{E.1}$$

où les états $|m\rangle$ sont les états excités de l'hamiltonien non perturbé $\hat{H}_0 = \hat{H}_0^G + \hat{H}_0^D$ et E_m les énergies correspondantes. Nous décrirons l'état ferromagnétique au moyen de la factorisation champ moyen du modèle de Hubbard donnée par Stoner ($\hat{H}_0^{G(D)} = \hat{H}_{Stoner}$)

[54, 55] :

$$\hat{H}_{Stoner} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \xi_{\mathbf{k}\sigma} c^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma} \ , \tag{E.2}$$

$$\xi_{\mathbf{k}\sigma} = \epsilon_{\mathbf{k}\sigma} + U(n_{\uparrow} + n_{\downarrow} - n_{\sigma}) = \epsilon_{\mathbf{k}\sigma} + U n_{\bar{\sigma}} \tag{E.3}$$

où $\epsilon_{\mathbf{k}\sigma}$ est la relation de dispersion dans l'approximation des *liaisons fortes*, U le paramètre d'interaction locale et $\bar{\sigma} =\uparrow (\downarrow)$ si $\sigma =\downarrow (\uparrow)$. En substituant l'expression pour $\hat{H}_T$ dans la formule (E.1), on obtient

$$\Delta E = \sum_{m} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}\sigma} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{q}'\sigma'} \frac{\langle 0|(t_{\mathbf{k}\mathbf{q}} c^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma} d_{\mathbf{q}\sigma} + t^{*}_{\mathbf{k}\mathbf{q}} d^{\dagger}_{\mathbf{q}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma})|m\rangle\langle m|(t_{\mathbf{k}'\mathbf{q}'} c^{\dagger}_{\mathbf{k}'\sigma'} d_{\mathbf{q}'\sigma'} + t^{*}_{\mathbf{k}'\mathbf{q}'} d^{\dagger}_{\mathbf{q}'\sigma'} c_{\mathbf{k}'\sigma'})|0\rangle}{E_0 - E_m} \tag{E.4}$$

$$= \sum_{m} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}\sigma} |t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}|^2 \frac{\langle 0|c^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma} d_{\mathbf{q}\sigma}|m\rangle\langle m|d^{\dagger}_{\mathbf{q}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma}|0\rangle + \langle 0|d^{\dagger}_{\mathbf{q}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma}|m\rangle\langle m|c^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma} d_{\mathbf{q}\sigma}|0\rangle}{E_0 - E_m} \tag{E.5}$$

$$= \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}\sigma} |t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}|^2 \left\{ \frac{[f(\xi_{\mathbf{k}\sigma})(1 - f(\xi_{\mathbf{q}\sigma}))]^2}{\xi_{\mathbf{k}\sigma} - \xi_{\mathbf{q}\sigma}} + \frac{[f(\xi_{\mathbf{q}\sigma})(1 - f(\xi_{\mathbf{k}\sigma}))]^2}{\xi_{\mathbf{q}\sigma} - \xi_{\mathbf{k}\sigma}} \right\} \tag{E.6}$$

$$= \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}} |t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}|^2 \frac{f^2(\xi_{\mathbf{k}\sigma}) - f^2(\xi_{\mathbf{q}\sigma}) - 2f(\xi_{\mathbf{k}\sigma})f(\xi_{\mathbf{q}\sigma})[f(\xi_{\mathbf{k}\sigma}) - f(\xi_{\mathbf{q}\sigma})]}{\xi_{\mathbf{k}\sigma} - \xi_{\mathbf{q}\sigma}} \ , \tag{E.7}$$

où f est la distribution de Fermi-Dirac. Puisque le calcul se fait à température nulle

$$f(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \leq \mu \\ 0 & \text{si } \xi > \mu \ , \end{cases} \tag{E.8}$$

où μ est le potentiel chimique. Dans ce cas, le terme $2f(\xi_{\mathbf{k}\sigma})f(\xi_{\mathbf{q}\sigma})[f(\xi_{\mathbf{k}\sigma}) - f(\xi_{\mathbf{q}\sigma})]$ dans (E.7) s'annulent. En effet, si le facteur $f(\xi_{\mathbf{k}\sigma})f(\xi_{\mathbf{q}\sigma})$ est non-nul, alors $f(\xi_{\mathbf{k}\sigma}) = 1$ et $f(\xi_{\mathbf{q}\sigma}) = 1$, de sorte que le facteur entre crochet est nul. Inversement, pour que le facteur entre crochets soit non-nul, on doit avoir $f(\xi_{\mathbf{k}\sigma}) = 1$ et $f(\xi_{\mathbf{q}\sigma}) = 0$ ou l'inverse, de sorte que le facteur $f(\xi_{\mathbf{k}\sigma})f(\xi_{\mathbf{q}\sigma})$, lui, est nul. Par conséquent, l'expression pour la correction à l'énergie de l'état fondamental se réduit à

$$\Delta E = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}\sigma} |t_{\mathbf{k}\mathbf{q}}|^2 \frac{f(\xi_{\mathbf{k}\sigma}) - f(\xi_{\mathbf{q}\sigma})}{\xi_{\mathbf{k}\sigma} - \xi_{\mathbf{q}\sigma}} \ , \tag{E.9}$$

où l'on a utilisé le fait qu'à $T = 0$, $f^2 = f$.

E.1 Configuration 1 : moments alignés

Considérons premièrement le cas où l'onde de densité de spin est uniforme à travers la jonction, c'est-à-dire que les moments magnétiques de part et d'autre sont alignés. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'onde de densité de spin est polarisée selon $\hat{\mathbf{z}}$. Dans ce cas, $n_\uparrow = n$ et $n_\downarrow = 0$ et les énergies de l'hamiltonien de Stoner sont

$$\begin{aligned} \xi_{\mathbf{k}(\mathbf{q})\uparrow} &= \epsilon_{\mathbf{k}(\mathbf{q})} \ , \\ \xi_{\mathbf{k}(\mathbf{q})\downarrow} &= \epsilon_{\mathbf{k}(\mathbf{q})} + h \ , \end{aligned} \tag{E.10}$$

où l'on a posé $h \equiv Un$. En substituant ces énergies dans (E.9), on trouve que la correction $\Delta E_{\uparrow\uparrow}$ à l'énergie du fondamental dans la configuration alignée est

$$\Delta E_{\uparrow\uparrow} = \sum_{\mathbf{kq}} |t_{\mathbf{kq}}|^2 \left\{ \frac{f(\epsilon_{\mathbf{k}}) - f(\epsilon_{\mathbf{q}})}{\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{q}}} + \frac{f(\epsilon_{\mathbf{k}} + h) - f(\epsilon_{\mathbf{q}} + h)}{\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{q}}} \right\} . \tag{E.11}$$

Nous allons évaluer cette expression en négligeant la dépendance en vecteur d'onde des amplitudes tunnel ($|t_{\mathbf{kq}}|^2 = |t|^2$), puis en approximant les sommes sur les vecteurs d'onde par des intégrales sur les relations de dispersion. Concentrons-nous sur le premier terme dans (E.11). On distingue deux cas où sa contribution est non-nulle : 1) $-W \leq \epsilon_{\mathbf{k}} \leq \mu \leq \epsilon_{\mathbf{q}} \leq W$ où W est la largeur de bande, dans quel cas $f(\epsilon_{\mathbf{k}}) = 1$ et $f(\epsilon_{\mathbf{q}}) = 0$, puis inversement, 2) $-W \leq \epsilon_{\mathbf{q}} \leq \mu \leq \epsilon_{\mathbf{k}} \leq W$, dans quel cas $f(\epsilon_{\mathbf{k}}) = 0$ et $f(\epsilon_{\mathbf{q}}) = 1$. En raisonnant de la même façon sur le second terme dans (E.11), on obtient

$$\begin{aligned} \Delta E_{\uparrow\uparrow} = |t|^2 N^2 \Bigg\{ & \int_{-W}^{\mu} d\epsilon_{\mathbf{k}} \int_{\mu}^{W} d\epsilon_{\mathbf{q}} \left(\frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{q}}} \right) + \int_{\mu}^{W} d\epsilon_{\mathbf{k}} \int_{-W}^{\mu} d\epsilon_{\mathbf{q}} \left(\frac{-1}{\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{q}}} \right) \\ & \int_{-W}^{\mu-h} d\epsilon_{\mathbf{k}} \int_{\mu-h}^{W} d\epsilon_{\mathbf{q}} \left(\frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{q}}} \right) + \int_{\mu-h}^{W} d\epsilon_{\mathbf{k}} \int_{-W}^{\mu-h} d\epsilon_{\mathbf{q}} \left(\frac{-1}{\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{q}}} \right) \Bigg\} , \end{aligned} \tag{E.12}$$

où N est la densité d'états que l'on a approximée par une constante. On remarque à présent que le second terme dans (E.12) est égal au premier sous $\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{q}$ et que, de la même façon, le quatrième est égal au troisième. Donc, en regroupant les termes, ceci devient

$$
\begin{aligned}
\Delta E_{\uparrow\uparrow} &= -2|t|^2N^2\bigg\{\int_{-W}^{\mu} d\epsilon_{\mathbf{k}}\int_{\mu}^{W} d\epsilon_{\mathbf{q}}\Big(\frac{1}{\epsilon_{\mathbf{q}}-\epsilon_{\mathbf{k}}}\Big) + \int_{-W}^{\mu-h} d\epsilon_{\mathbf{k}}\int_{\mu-h}^{W} d\epsilon_{\mathbf{q}}\Big(\frac{1}{\epsilon_{\mathbf{q}}-\epsilon_{\mathbf{k}}}\Big)\bigg\} \\
&= -2|t|^2N^2\bigg\{\int_{-W}^{\mu} d\epsilon_{\mathbf{k}}\big(\log(W-\epsilon_{\mathbf{k}})-\log(\mu-\epsilon_{\mathbf{k}})\big) \\
&\qquad\qquad + \int_{-W}^{\mu-h} d\epsilon_{\mathbf{k}}\big(\log(W-\epsilon_{\mathbf{k}})-\log(\mu-h-\epsilon_{\mathbf{k}})\big)\bigg\} \\
&= -2|t|^2N^2\bigg\{-\int_{2W}^{W-\mu} du\log u + \int_{W+\mu}^{0} du\log u - \int_{2W}^{W-\mu+h} du\log u + \int_{W+\mu-h}^{0} du\log u\bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -2|t|^2N^2\bigg\{-(W-\mu)\log(W-\mu)+(W-\mu)+2W\log(2W)-2W \\
&\qquad -(W+\mu)\log(W+\mu)+(W+\mu) \\
&\qquad -(W-\mu+h)\log(W-\mu+h)+(W-\mu+h)+2W\log(2W)-2W \\
&\qquad -(W+\mu-h)\log(W+\mu-h)+(W+\mu-h)\bigg\} \\
&= -2|t|^2N^2\bigg\{-W\log[(W-\mu)(W+\mu)(W-\mu+h)(W+\mu-h)] \\
&\qquad +\mu\log\left[\frac{(W-\mu)}{W+\mu)}\frac{(W-\mu+h)}{(W+\mu-h)}\right] \\
&\qquad +h\log\left[\frac{W+\mu-h}{W-\mu+h}\right]+4W\log(2W)\bigg\}
\end{aligned} \tag{E.13}
$$

E.2 Configuration 2 : moments anti-alignés

On peut supposer, sans perte de généralité, que le moment magnétique de gauche est polarisé selon $\hat{\mathbf{z}}$ et celui de droite selon $-\hat{\mathbf{z}}$. Les énergies de l'hamiltonien de Stoner sont alors

$$
\begin{aligned}
\xi_{\mathbf{k}\uparrow(\mathbf{q}\downarrow)} &= \epsilon_{\mathbf{k}(\mathbf{q})}\ , \\
\xi_{\mathbf{k}\downarrow(\mathbf{q}\uparrow)} &= \epsilon_{\mathbf{k}(\mathbf{q})} + h\ .
\end{aligned} \tag{E.14}
$$

En substituant ces énergies dans (E.9), on trouve que la correction $\Delta E_{\uparrow\downarrow}$ à l'énergie du fondamental dans la configuration anti-alignée est

$$\Delta E_{\uparrow\downarrow} = \sum_{\mathbf{kq}} |t_{\mathbf{kq}}|^2 \left\{ \frac{f(\epsilon_{\mathbf{k}}) - f(\epsilon_{\mathbf{q}} + h)}{\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{q}} - h} + \frac{f(\epsilon_{\mathbf{k}} + h) - f(\epsilon_{\mathbf{q}})}{\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{q}} + h} \right\} . \tag{E.15}$$

En procédant de la même façon que dans le cas où les moments sont alignés, ceci peut se récrire en remplaçant les sommes par des intégrales sur l'énergie

$$\Delta E_{\uparrow\downarrow} = -2|t|^2 N^2 \left\{ \int_{-W}^{\mu} d\epsilon_{\mathbf{k}} \int_{\mu-h}^{W} d\epsilon_{\mathbf{q}} \left(\frac{1}{\epsilon_{\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}} + h} \right) + \int_{-W}^{\mu-h} d\epsilon_{\mathbf{k}} \int_{\mu}^{W} d\epsilon_{\mathbf{q}} \left(\frac{1}{\epsilon_{\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{k}} - h} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= -2|t|^2 N^2 \left\{ \int_{-W}^{\mu} d\epsilon_{\mathbf{k}} \big(\log(W - \epsilon_{\mathbf{k}} + h) - \log(\mu - \epsilon_{\mathbf{k}}) \big) \right. \\
&\qquad \left. + \int_{-W}^{\mu-h} d\epsilon_{\mathbf{k}} \big(\log(W - \epsilon_{\mathbf{k}} - h) - \log(\mu - \epsilon_{\mathbf{k}} - h) \big) \right\} \\
&= -2|t|^2 N^2 \left\{ -\int_{2W+h}^{W-\mu+h} du \log u + \int_{W+\mu}^{0} du \log u - \int_{2W-h}^{W-\mu} du \log u + \int_{W+\mu-h}^{0} du \log u \right\} \\
&= -2|t|^2 N^2 \Big\{ -(W - \mu + h)\log(W - \mu + h) + (W - \mu + h) + (2W + h)\log(2W + h) - (2W + h) \\
&\qquad - (W + \mu)\log(W + \mu) + (W + \mu) \\
&\qquad - (W - \mu)\log(W - \mu) + (W - \mu) + (2W - h)\log(2W - h) - (2W - h) \\
&\qquad - (W + \mu - h)\log(W + \mu - h) + (W + \mu - h) \Big\} \\
&= -2|t|^2 N^2 \Big\{ -W \log[(W - \mu + h)(W + \mu)(W - \mu)(W + \mu - h)] \\
&\qquad + \mu \log \left[\frac{(W - \mu + h)}{(W + \mu)} \frac{(W - \mu)}{(W + \mu - h)} \right] + h \log \left[\frac{(W + \mu - h)}{(W - \mu + h)} \frac{(2W + h)}{(2W - h)} \right] \\
&\qquad + 2W \log[(2W + h)(2W - h)] \Big\}
\end{aligned} \tag{E.16}$$

E.3 Configuration de plus basse énergie

En posant $\mu = 0$, $W = 4$ et $2|t|^2N^2 = 1$ dans les expressions (E.13) et (E.16), on obtient

$$\Delta E_{\uparrow\uparrow} = 4\log[16(16-h^2)] - h\log\left[\frac{4-h}{4+h}\right] - 8\log 64\ , \tag{E.17}$$

$$\Delta E_{\uparrow\downarrow} = 4\log[16(16-h^2)] - h\log\left[\frac{(4-h)(8+h)}{(4+h)(8-h)}\right] - 8\log[64-h^2]\ . \tag{E.18}$$

Une représentation graphique de ces deux fonctions est donnée à la Fig.(E.1) et montre (étonnament) que la configuration de plus basse énergie ne correspond pas à celle où l'onde de densité de spin est uniforme à travers le système, c'est-à-dire qu'il n'est pas énergétiquement favorable pour le système d'aligner les moments magnétiques de part et d'autre de la jonction. Au contraire, le système préfèrera la configuration dans laquelle les moments sont anti-alignés.

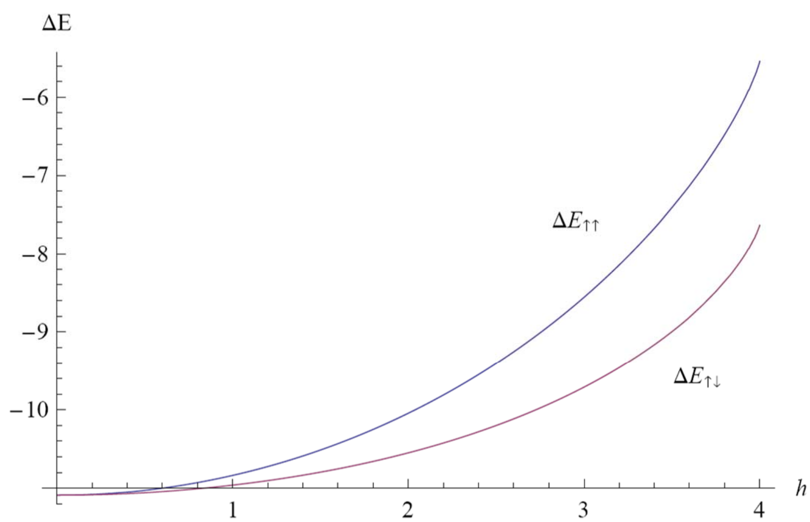

FIG. E.1 – Corrections au 2ᵉ ordre en $\hat{H}_T$ à l'énergie d'une jonction tunnel FM-FM dans le cas où les moments magnétiques de part et d'autre de la jonction sont alignés (bleu) et anti-alignés (mauve). Les corrections à l'énergie sont tracées en fonction du paramètre $h \equiv Un$.

Annexe F

Résonnance antiferromagnétique d'un AF itinérant composé de particules de spin $S > 1/2$ dans le contexte d'une jonction AF/I/AF

À la section 2.3, nous avons souligné que le courant Josephson de moment magnétique alterné ne pourrait être observé au moyen d'une expérience de résonnance antiferromagnétique en raison du fait que, pour des particules de spin 1/2, les opérateurs de spin dans les directions transverses au champ d'anisotropie commutent avec l'hamiltonien d'anisotropie de spin. Dans cette annexe, nous considérons le cas hypothétique d'une jonction AF/I/AF où les AF itinérants sont composés de particules de spin $S > 1/2$ et nous étudions les conséquences que l'effet Josephson de spin aurait sur les fréquences de résonnance antiferromagnétique de chacun des deux AF.

Pour ce faire, nous allons décrire l'effet du couplage tunnel au moyen d'un champ magnétique effectif $\mathbf{H}_{\text{eff}}$ de module ω_0 orienté dans la direction de $\mathbf{\Sigma} \equiv \mathbf{S}_G + \mathbf{S}_D$. Nous allons calculer les fréquences de résonnances antiferromagnétique de l'antiferroaimant gauche en présence de $\mathbf{H}_{\text{eff}}$ en utilisant le formalisme de Kittel [42]. Le calcul sera classique.

On représente donc l'antiferroaimant sur un réseau bipartite, c'est-à-dire composé de deux sous-réseaux d'aimantations opposées $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$ de module M_s. On traite l'interaction d'échange au moyen de champs moléculaires $\mathbf{H}_1 = -\lambda\mathbf{M}_2$ et $\mathbf{H}_2 = -\lambda\mathbf{M}_1$ agissant sur $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$ respectivement. L'existence d'une orientation préférentielle dans les antiferroaimants est bien connue et par analogie avec le ferromagnétisme, on introduit une constante de densité d'énergie d'anisotropie K afin de décrire l'énergie requise pour effectuer une rotation simultanée de $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$ par rapport au réseau cristallin. On peut alors dire, pour de légères déflexions, qu'il existe un champ d'anisotropie $\mathbf{H}_A = K/M_s$ agissant sur chacun des deux sous-réseaux. Nous prendrons le champ statique $\mathbf{H}_0$ et le champ d'anisotropie $\mathbf{H}_A$ dans la direction $\hat{z}$[1]. Dans la limite où $\mathbf{S}_G$ et $\mathbf{S}_D$ sont presque colinéaires nous pouvons, comme Kittel, négliger le mouvement de $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$ selon $\hat{z}$.

Les équations du mouvement en présence d'un champ rf transverse $\mathbf{H} = (H^x, H^y, 0)$ et du champ effectif $\mathbf{H}_{\text{eff}} = \omega_0(\sin(\theta/2)\cos(\phi), \sin(\theta/2)\sin(\phi), \cos(\theta/2))$ sont alors

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{M}}_1 = \gamma\mathbf{M}_1 \times \Bigg[&\Big(H^x - \lambda M_2^x - \frac{\omega_0}{\gamma}\sin(\theta/2)\cos(\phi)\Big)\mathbf{i} \\ &+ \Big(H^y - \lambda M_2^y - \frac{\omega_0}{\gamma}\sin(\theta/2)\sin(\phi))\Big)\mathbf{j} + \Big(H_0 + H_A + H_E - \frac{\omega_0}{\gamma}\cos(\theta/2))\Big)\mathbf{k}\Bigg] \quad \text{(F.1)}\\ \dot{\mathbf{M}}_2 = \gamma\mathbf{M}_2 \times \Bigg[&\Big(H^x - \lambda M_1^x - \frac{\omega_0}{\gamma}\sin(\theta/2)\cos(\phi)\Big)\mathbf{i} \\ &+ \Big(H^y - \lambda M_1^y - \frac{\omega_0}{\gamma}\sin(\theta/2)\sin(\phi))\Big)\mathbf{j} + \Big(H_0 - H_A - H_E - \frac{\omega_0}{\gamma}\cos(\theta/2))\Big)\mathbf{k}\Bigg] \quad \text{(F.2)}\end{aligned}$$

où $H_E = \lambda M_s = \lambda M_1^z = -\lambda M_2^z$. En définissant $M^- = M^x - iM^y$ et $H^- = H^x - iH^y$, on obtient

$$M^- = 2\gamma M_s H_A \left(\frac{\gamma H^- \mathrm{e}^{-i\omega t}}{(\omega - \Omega_+)(\omega - \Omega_-)} + \frac{\omega_0 \sin(\theta/2)\mathrm{e}^{-i\phi}}{\Omega_+\Omega_-}\right) \quad \text{(F.3)}$$

où

$$\Omega_\pm = \omega_0\cos(\theta/2) - \gamma H_0 \pm \gamma\sqrt{H_A(H_A + 2H_E)}\ . \quad \text{(F.4)}$$

[1] De cette façon, $\mathbf{S}_G$ est orienté selon $\mathbf{H}_A$ en l'absence de couplage tunnel et de champ externe, comme il se doit.

On pourrait donc s'attendre à ce que le couplage tunnel provoque un déplacement uniforme de l'ordre de ω_0 dans les fréquences de résonnance antiferromagnétiques de chacun des antiferroaimants de la jonction. Avec $|\frac{2\Delta}{S}| = U = 2\text{eV}$ et une conductance à l'état normal de l'ordre du quantum de conductance, $R^{-1} = 2e^2/h$, on trouve une valeur de ω_0 de l'ordre de 10^{14} Hz, autrement dit dans le visible. Cette fréquence devrait être plus grande que le gap antiferromagnétique et devrait donc entraîner un amortissement important. Par conséquent, il serait nécessaire d'utiliser des résistances plus grande par plusieurs ordres de grandeur afin d'abaisser la valeur de cette fréquence.

Annexe G

Matrice de transformation pour l'hamiltonien champ moyen avec coexistence AF-SC

La matrice de transformation $A_{i,j}$ qui diagonalise l'hamiltonien phénoménologique (5.8) est définie par

$$\psi_{i\mathbf{k}} = \sum_j A_{ij}(\mathbf{k})\gamma_{j\mathbf{k}} \tag{G.1}$$

où

$$\psi^\dagger_{\mathbf{k}} \equiv \left(c^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow}, c_{-\mathbf{k}\downarrow}, c^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\uparrow}, c_{-\mathbf{k}-\mathbf{Q}\downarrow}\right). \tag{G.2}$$

Les composantes du premier vecteur colonne sont données par

$$
\begin{aligned}
A_{1,1} =& \Big\{ [E_+(\mathbf{k}) + \epsilon_{\mathbf{k}}][E_+(\mathbf{k}) + \epsilon_{\mathbf{k_Q}}][E_+(\mathbf{k}) - \epsilon_{\mathbf{k+Q}}] - [E_+(\mathbf{k}) - \epsilon_{\mathbf{k+Q}}](Um)^2 \\
& - [E_+(\mathbf{k}) + \epsilon_{\mathbf{k}}][Vs\phi(\mathbf{k})]^2 - [E_+(\mathbf{k}) + \epsilon_{\mathbf{k+Q}}][Wt\phi(\mathbf{k})]^2 \\
& + 2(Um)[Vs\phi(\mathbf{k})][Wt\phi(\mathbf{k})] \Big\} \Big/ \sqrt{\sum_i A_{i,1}^2} \, ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{2,1} =& \Big\{ [Vs\phi(\mathbf{k})] \Big([E_+(\mathbf{k}) + \epsilon_{\mathbf{k+Q}}][E_+(\mathbf{k}) - \epsilon_{\mathbf{k+Q}}] - (Um)^2 \\
& - [Vs\phi(\mathbf{k})]^2 + [Wt\phi(\mathbf{k})]^2 \Big) + 2(Um)[Wt\phi(\mathbf{k})]\epsilon_{\mathbf{k+Q}} \Big\} \Big/ \sqrt{\sum_i A_{i,1}^2(\mathbf{k})} \, ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{3,1} =& - \Big\{ (Um) \Big([E_+(\mathbf{k}) + \epsilon_{\mathbf{k}}][E_+(\mathbf{k}) + \epsilon_{\mathbf{k+Q}}] - (Um)^2 - [Vs\phi(\mathbf{k})]^2 \\
& - [Wt\phi(\mathbf{k})]^2 \Big) + [Vs\phi(\mathbf{k})][Wt\phi(\mathbf{k})][2E_+(\mathbf{k}) + \epsilon_{\mathbf{k+Q}} + \epsilon_{\mathbf{k}}] \Big\} \Big/ \sqrt{\sum_i A_{i,1}^2} \, ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{4,1} =& \Big\{ [Wt\phi(\mathbf{k})] \Big([E_+(\mathbf{k}) + \epsilon_{\mathbf{k}}][E_+(\mathbf{k}) - \epsilon_{\mathbf{k+Q}}] - (Um)^2 + [Vs\phi(\mathbf{k})]^2 \\
& - [Wt\phi(\mathbf{k})]^2 \Big) + (Um)[Vs\phi(\mathbf{k})](\epsilon_{\mathbf{k+Q}} + \epsilon_{\mathbf{k}}) \Big\} \Big/ \sqrt{\sum_i A_{i,1}^2} \, , \qquad \text{(G.3)}
\end{aligned}
$$

où le carré de la norme du vecteur est

$$
\begin{aligned}
\sum_i A_{i,1}^2 =& 2E_+(\mathbf{k})g(\mathbf{k}) \Big\{ [E_+(\mathbf{k}) + \epsilon_{\mathbf{k}}][2g(\mathbf{k}) + \epsilon_{\mathbf{k}}^2 - \epsilon_{\mathbf{k+Q}}^2] + 2(Um)^2(\epsilon_{\mathbf{k+Q}} + \epsilon_{\mathbf{k}}) \\
& + 4(Um)[Vs\phi(\mathbf{k})][Wt\phi(\mathbf{k})] + 2[Wt\phi(\mathbf{k})]^2(\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k+Q}}) \Big\} \, . \qquad \text{(G.4)}
\end{aligned}
$$

Par symétrie, le second vecteur colonne $A_{i,2}$ s'obtient du premier comme suit : $A_{1,2} = -A_{2,1}$, $A_{2,2} = A_{1,1}$, $A_{3,2} = A_{4,1}$, $A_{4,2} = -A_{3,1}$. Le troisième vecteur colonne peut s'exprimer en fonction du premier : $A_{1,3} = A_{3,1}$, $A_{2,3} = -A_{4,1}$, $A_{3,3} = A_{1,1}$, $A_{4,3} = -A_{2,1}$ avec les substitutions suivantes dans $A_{i,1}$, $\epsilon_{\mathbf{k}} \leftrightarrow \epsilon_{\mathbf{k+Q}}$, $g(\mathbf{k}) \leftrightarrow -g(\mathbf{k})$, $E_+(\mathbf{k}) \leftrightarrow E_-(\mathbf{k})$. Finalement, le quatrième vecteur colonne $A_{i,4}$ s'obtient du troisième par symétrie $A_{1,4} = A_{2,3}$, $A_{2,4} = -A_{1,3}$, $A_{3,4} = -A_{4,3}$, $A_{4,4} = A_{3,3}$.

Annexe H

Calcul des facteurs de cohérences $\tilde{\Gamma}^{ij}_{\alpha\delta}$ dans les équations (5.23) et (5.24)

Dans cette annexe, nous donnons la dérivation des facteurs de cohérence qui interviennent dans nos calculs dans le cas avec coexistence AF-SC aux équations (5.23) et (5.24).

On récrit d'abord la somme sur les impulsions dans (5.23) en la réduisant dans la première zone de brillouin magnétique :

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{kq}}\sum_{\alpha\beta\delta}\vec{\sigma}_{\alpha\beta}U_{\beta\delta}t_{\mathbf{kq}}\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k+Q}\alpha}d_{\mathbf{q}\delta}\rangle = \sum^{*}_{\mathbf{kq}}\sum_{\alpha\beta\delta}\vec{\sigma}_{\alpha\beta}U_{\beta\delta}t_{\mathbf{kq}}\Big\{&\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k+Q}\alpha}d_{\mathbf{q}\delta}\rangle + \langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}d_{\mathbf{q}\delta}\rangle \\ &+ \langle c^{\dagger}_{\mathbf{k+Q}\alpha}d_{\mathbf{q+Q}\delta}\rangle + \langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}d_{\mathbf{q+Q}\delta}\rangle\Big\},\end{aligned} \tag{H.1}$$

où l'on a supposé $t_{\mathbf{kq}} = t_{\mathbf{kq+Q}} = t_{\mathbf{k+Qq}} = t_{\mathbf{k+Qq+Q}}$. On traite ensuite séparément chacun des quatres termes entre accolades :

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}_{\alpha\beta}U_{\beta\delta}\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}d_{\mathbf{q}\delta}\rangle = &\Big\{\vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\uparrow}\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\uparrow}d_{\mathbf{q}\uparrow}\rangle + \vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\downarrow}\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\uparrow}d_{\mathbf{q}\downarrow}\rangle \\
&+ \vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\uparrow}\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\downarrow}d_{\mathbf{q}\uparrow}\rangle + \vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\downarrow}\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\downarrow}d_{\mathbf{q}\downarrow}\rangle\Big\} \\
= \sum_{ij}&\Big\{\vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\uparrow}\,A_{3i}(\mathbf{k})A_{1j}(\mathbf{q})\langle\gamma^{\dagger}_{i\mathbf{k}}\gamma_{j\mathbf{q}}\rangle + \vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\downarrow}\,A_{3i}(\mathbf{k})A_{2j}(\mathbf{q})\langle\gamma^{\dagger}_{i\mathbf{k}}\gamma^{\dagger}_{j\mathbf{q}}\rangle \\
&+ \vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\uparrow}\,A_{4i}(\mathbf{k})A_{1j}(\mathbf{q})\langle\gamma_{i\mathbf{k}}\gamma_{j\mathbf{q}}\rangle + \vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\downarrow}\,A_{4i}(\mathbf{k})A_{2j}(\mathbf{q})\langle\gamma_{i\mathbf{k}}\gamma^{\dagger}_{j\mathbf{q}}\rangle\Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}_{\alpha\beta}U_{\beta\delta}\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}d_{\mathbf{q}\delta}\rangle = &\Big\{\vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\uparrow}\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}\uparrow}d_{\mathbf{q}\uparrow}\rangle + \vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\downarrow}\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}\uparrow}d_{\mathbf{q}\downarrow}\rangle \\
&+ \vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\uparrow}\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}\downarrow}d_{\mathbf{q}\uparrow}\rangle + \vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\downarrow}\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}\downarrow}d_{\mathbf{q}\downarrow}\rangle\Big\} \\
= \sum_{ij}&\Big\{\vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\uparrow}\,A_{1i}(\mathbf{k})A_{1j}(\mathbf{q})\langle\gamma^{\dagger}_{i\mathbf{k}}\gamma_{j\mathbf{q}}\rangle + \vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\downarrow}\,A_{1i}(\mathbf{k})A_{2j}(\mathbf{q})\langle\gamma^{\dagger}_{i\mathbf{k}}\gamma^{\dagger}_{j\mathbf{q}}\rangle \\
&+ \vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\uparrow}\,A_{2i}(\mathbf{k})A_{1j}(\mathbf{q})\langle\gamma_{i\mathbf{k}}\gamma_{j\mathbf{q}}\rangle + \vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\downarrow}\,A_{2i}(\mathbf{k})A_{2j}(\mathbf{q})\langle\gamma_{i\mathbf{k}}\gamma^{\dagger}_{j\mathbf{q}}\rangle\Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}_{\alpha\beta}U_{\beta\delta}\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\alpha}d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}\delta}\rangle = &\Big\{\vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\uparrow}\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\uparrow}d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}\uparrow}\rangle + \vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\downarrow}\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\uparrow}d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}\downarrow}\rangle \\
&+ \vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\uparrow}\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\downarrow}d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}\uparrow}\rangle + \vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\downarrow}\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}\downarrow}d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}\downarrow}\rangle\Big\} \\
= \sum_{ij}&\Big\{\vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\uparrow}\,A_{3i}(\mathbf{k})A_{3j}(\mathbf{q})\langle\gamma^{\dagger}_{i\mathbf{k}}\gamma_{j\mathbf{q}}\rangle + \vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\downarrow}\,A_{3i}(\mathbf{k})A_{4j}(\mathbf{q})\langle\gamma^{\dagger}_{i\mathbf{k}}\gamma^{\dagger}_{j\mathbf{q}}\rangle \\
&+ \vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\uparrow}\,A_{4i}(\mathbf{k})A_{3j}(\mathbf{q})\langle\gamma_{i\mathbf{k}}\gamma_{j\mathbf{q}}\rangle + \vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\downarrow}\,A_{4i}(\mathbf{k})A_{4j}(\mathbf{q})\langle\gamma_{i\mathbf{k}}\gamma^{\dagger}_{j\mathbf{q}}\rangle\Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}_{\alpha\beta}U_{\beta\delta}\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}\delta}\rangle = &\Big\{\vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\uparrow}\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}\uparrow}d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}\uparrow}\rangle + \vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\downarrow}\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}\uparrow}d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}\downarrow}\rangle \\
&+ \vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\uparrow}\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}\downarrow}d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}\uparrow}\rangle + \vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\downarrow}\langle c^{\dagger}_{\mathbf{k}\downarrow}d_{\mathbf{q}+\mathbf{Q}\downarrow}\rangle\Big\} \\
= \sum_{ij}&\Big\{\vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\uparrow}\,A_{1i}(\mathbf{k})A_{3j}(\mathbf{q})\langle\gamma^{\dagger}_{i\mathbf{k}}\gamma_{j\mathbf{q}}\rangle + \vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\downarrow}\,A_{1i}(\mathbf{k})A_{4j}(\mathbf{q})\langle\gamma^{\dagger}_{i\mathbf{k}}\gamma^{\dagger}_{j\mathbf{q}}\rangle \\
&+ \vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\uparrow}\,A_{2i}(\mathbf{k})A_{3j}(\mathbf{q})\langle\gamma_{i\mathbf{k}}\gamma_{j\mathbf{q}}\rangle + \vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\downarrow}\,A_{2i}(\mathbf{k})A_{4j}(\mathbf{q})\langle\gamma_{i\mathbf{k}}\gamma^{\dagger}_{j\mathbf{q}}\rangle\Big\}
\end{aligned}$$

En rassemblant ces quatres contributions et en les subtituant dans (**??**), on obtient

$$\sum_{\mathbf{kq}\beta}^{*}\sum_{ij} t_{\mathbf{kq}}\Big\{\vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\uparrow}\Big(A_{1i}(\mathbf{k})+A_{3i}(\mathbf{k})\Big)\Big(A_{1j}(\mathbf{q})+A_{3j}(\mathbf{q})\Big)\langle\gamma^{\dagger}_{i\mathbf{k}}\gamma_{j\mathbf{q}}\rangle$$
$$+\vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\downarrow}\Big(A_{1i}(\mathbf{k})+A_{3i}(\mathbf{k})\Big)\Big(A_{2j}(\mathbf{q})+A_{4j}(\mathbf{q})\Big)\langle\gamma^{\dagger}_{i\mathbf{k}}\gamma^{\dagger}_{j\mathbf{q}}\rangle$$
$$+\vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\uparrow}\Big(A_{2i}(\mathbf{k})+A_{4i}(\mathbf{k})\Big)\Big(A_{1j}(\mathbf{q})+A_{3j}(\mathbf{q})\Big)\langle\gamma_{i\mathbf{k}}\gamma_{j\mathbf{q}}\rangle$$
$$+\vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\downarrow}\Big(A_{2i}(\mathbf{k})+A_{4i}(\mathbf{k})\Big)\Big(A_{2j}(\mathbf{q})+A_{4j}(\mathbf{q})\Big)\langle\gamma_{i\mathbf{k}}\gamma^{\dagger}_{j\mathbf{q}}\rangle\Big\}$$

En définissant

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow} &= [A_{1i}(\mathbf{k})+A_{3i}(\mathbf{k})][A_{1j}(\mathbf{q})+A_{3j}(\mathbf{q})]\\
\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow} &= [A_{1i}(\mathbf{k})+A_{3i}(\mathbf{k})][A_{2j}(\mathbf{q})+A_{4j}(\mathbf{q})]\\
\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow} &= [A_{2i}(\mathbf{k})+A_{4i}(\mathbf{k})][A_{1j}(\mathbf{q})+A_{3j}(\mathbf{q})]\\
\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} &= [A_{2i}(\mathbf{k})+A_{4i}(\mathbf{k})][A_{2j}(\mathbf{q})+A_{4j}(\mathbf{q})]\ ,
\end{aligned} \tag{H.2}$$

l'expression précédente peut se récrire

$$\equiv \sum_{\mathbf{kq}\beta}^{*}\sum_{ij} t_{\mathbf{kq}}\Big\{\vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\uparrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\langle\gamma^{\dagger}_{i\mathbf{k}}\gamma_{j\mathbf{q}}\rangle+\vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\downarrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow}\langle\gamma^{\dagger}_{i\mathbf{k}}\gamma^{\dagger}_{j\mathbf{q}}\rangle$$
$$+\vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\uparrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow}\langle\gamma_{i\mathbf{k}}\gamma_{j\mathbf{q}}\rangle+\vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\downarrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow}\langle\gamma_{i\mathbf{k}}\gamma^{\dagger}_{j\mathbf{q}}\rangle\Big\}\ .$$

Annexe I

Calcul détaillé du courant de moment magnétique alterné dans le cas avec coexistence AF/SC

Dans cette annexe, nous rendons explicites les détails du calcul permettant d'obtenir l'expression finale du courant de moment magnétique (5.27) dans le cas avec coexistence AF-SC à partir des équations (5.23) et (5.25).

On calcule chacune des valeurs moyennes dans (5.23) en réponse linéaire comme à l'équation (5.25). L'équation (5.23) s'écrit alors

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{S}}_G(t) = \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}}^{*} \sum_{\beta} \sum_{i,j} \mathrm{Im}\Bigg[-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{t} dt' e^{-0^+(t-t')} \times \\
\Bigg(t_{\mathbf{kq}}^2\, e^{i\Delta\varphi} \Big\{ & \vec{\sigma}_{\uparrow\beta} U_{\beta\uparrow} U_{\downarrow\downarrow}\, \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow} \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} \langle [\gamma^\dagger_{i\mathbf{k}}(t)\gamma_{j\mathbf{q}}(t), \gamma_{i\mathbf{k}}(t')\gamma^\dagger_{j\mathbf{q}}(t')] \rangle_0 \\
& + \vec{\sigma}_{\uparrow\beta} U_{\beta\downarrow} U_{\downarrow\uparrow}\, \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow} \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow} \langle [\gamma^\dagger_{i\mathbf{k}}(t)\gamma^\dagger_{j\mathbf{q}}(t), \gamma_{i\mathbf{k}}(t')\gamma_{j\mathbf{q}}(t')] \rangle_0 \\
& + \vec{\sigma}_{\downarrow\beta} U_{\beta\uparrow} U_{\uparrow\downarrow}\, \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow} \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow} \langle [\gamma_{i\mathbf{k}}(t)\gamma_{j\mathbf{q}}(t), \gamma^\dagger_{i\mathbf{k}}(t')\gamma^\dagger_{j\mathbf{q}}(t')] \rangle_0 \\
& + \vec{\sigma}_{\downarrow\beta} U_{\beta\downarrow} U_{\uparrow\uparrow}\, \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow} \langle [\gamma_{i\mathbf{k}}(t)\gamma^\dagger_{j\mathbf{q}}(t), \gamma^\dagger_{i\mathbf{k}}(t')\gamma_{j\mathbf{q}}(t')] \rangle_0 \Big\} \\
+ |t_{\mathbf{kq}}|^2 \Big\{ & \vec{\sigma}_{\uparrow\beta} U_{\beta\uparrow} U^\dagger_{\uparrow\uparrow}\, \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow} \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow} \langle [\gamma^\dagger_{i\mathbf{k}}(t)\gamma_{j\mathbf{q}}(t), \gamma^\dagger_{j\mathbf{q}}(t')\gamma_{i\mathbf{k}}(t')] \rangle_0 \\
& + \vec{\sigma}_{\uparrow\beta} U_{\beta\downarrow} U^\dagger_{\downarrow\uparrow}\, \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow} \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow} \langle [\gamma^\dagger_{i\mathbf{k}}(t)\gamma^\dagger_{j\mathbf{q}}(t), \gamma_{j\mathbf{q}}(t')\gamma_{i\mathbf{k}}(t')] \rangle_0 \\
& + \vec{\sigma}_{\downarrow\beta} U_{\beta\uparrow} U^\dagger_{\uparrow\downarrow}\, \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow} \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow} \langle [\gamma_{i\mathbf{k}}(t)\gamma_{j\mathbf{q}}(t), \gamma^\dagger_{j\mathbf{q}}(t')\gamma^\dagger_{i\mathbf{k}}(t')] \rangle_0 \\
& + \vec{\sigma}_{\downarrow\beta} U_{\beta\downarrow} U^\dagger_{\downarrow\downarrow}\, \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} \langle [\gamma_{i\mathbf{k}}(t)\gamma^\dagger_{j\mathbf{q}}(t), \gamma_{j\mathbf{q}}(t')\gamma^\dagger_{i\mathbf{k}}(t')] \rangle_0 \Big\} \Bigg) \Bigg] ,
\end{aligned} \tag{I.1}
$$

où l'on remarque le facteur $e^{i\Delta\varphi}$ apparaissant devant la première accolade, laquelle regroupe des termes de la forme $\langle c^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} c^\dagger_{\mathbf{k}'\sigma'} d_{\mathbf{q}\delta} d_{\mathbf{q}'\delta'} \rangle$ correspondant au transfert d'une paire de Cooper à travers la jonction.

En récrivant l'expression précédente en utilisant les fonctions de Green de Keldysh

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}^<_{i\mathbf{k}}(t,t') &\equiv i \langle \gamma^\dagger_{i\mathbf{k}}(t') \gamma_{i\mathbf{k}}(t) \rangle_0 \ , \\
\mathcal{G}^>_{i\mathbf{k}}(t,t') &\equiv -i \langle \gamma_{i\mathbf{k}}(t) \gamma^\dagger_{i\mathbf{k}}(t') \rangle_0 \ ,
\end{aligned} \tag{I.2}
$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{S}}_G(t) = \frac{1}{N^2}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}}^{*}\sum_{\beta}\sum_{i,j}\mathrm{Im}\Bigg[& -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' e^{-0^+(t-t')}\times \\
& \Bigg(t_{\mathbf{kq}}^2 e^{i\Delta\varphi}\Big\{ \vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\uparrow}U_{\downarrow\downarrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow}\Big(\mathcal{G}^{>}_{i\mathbf{k}}(t'-t)\mathcal{G}^{<}_{j\mathbf{q}}(t-t') - \mathcal{G}^{<}_{i\mathbf{k}}(t'-t)\mathcal{G}^{>}_{j\mathbf{q}}(t-t')\Big) \\
& \quad + \vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\downarrow}U_{\downarrow\uparrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow}\Big(\mathcal{G}^{>}_{i\mathbf{k}}(t'-t)\mathcal{G}^{>}_{j\mathbf{q}}(t'-t) - \mathcal{G}^{<}_{i\mathbf{k}}(t'-t)\mathcal{G}^{<}_{j\mathbf{q}}(t'-t)\Big) \\
& \quad + \vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\uparrow}U_{\uparrow\downarrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow}\Big(\mathcal{G}^{<}_{i\mathbf{k}}(t-t')\mathcal{G}^{<}_{j\mathbf{q}}(t-t') - \mathcal{G}^{>}_{i\mathbf{k}}(t-t')\mathcal{G}^{>}_{j\mathbf{q}}(t-t')\Big) \\
& \quad + \vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\downarrow}U_{\uparrow\uparrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\Big(\mathcal{G}^{<}_{i\mathbf{k}}(t-t')\mathcal{G}^{>}_{j\mathbf{q}}(t'-t) - \mathcal{G}^{>}_{i\mathbf{k}}(t-t')\mathcal{G}^{<}_{j\mathbf{q}}(t'-t)\Big)\Big\} \\
& - |t_{\mathbf{kq}}|^2\Big\{ \vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\uparrow}U^{\dagger}_{\uparrow\uparrow}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow})^2\Big(\mathcal{G}^{>}_{i\mathbf{k}}(t'-t)\mathcal{G}^{<}_{j\mathbf{q}}(t-t') - \mathcal{G}^{<}_{i\mathbf{k}}(t'-t)\mathcal{G}^{>}_{j\mathbf{q}}(t-t')\Big) \\
& \quad + \vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\downarrow}U^{\dagger}_{\downarrow\uparrow}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow})^2\Big(\mathcal{G}^{>}_{i\mathbf{k}}(t'-t)\mathcal{G}^{>}_{j\mathbf{q}}(t'-t) - \mathcal{G}^{<}_{i\mathbf{k}}(t'-t)\mathcal{G}^{<}_{j\mathbf{q}}(t'-t)\Big) \\
& \quad + \vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\uparrow}U^{\dagger}_{\uparrow\downarrow}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow})^2\Big(\mathcal{G}^{<}_{i\mathbf{k}}(t-t')\mathcal{G}^{<}_{j\mathbf{q}}(t-t') - \mathcal{G}^{>}_{i\mathbf{k}}(t-t')\mathcal{G}^{>}_{j\mathbf{q}}(t-t')\Big) \\
& \quad + \vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\downarrow}U^{\dagger}_{\downarrow\downarrow}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow})^2\Big(\mathcal{G}^{<}_{i\mathbf{k}}(t-t')\mathcal{G}^{>}_{j\mathbf{q}}(t'-t) - \mathcal{G}^{>}_{i\mathbf{k}}(t-t')\mathcal{G}^{<}_{j\mathbf{q}}(t'-t)\Big)\Big\}\Bigg)\Bigg] ,
\end{aligned}
\tag{I.3}
$$

où les fonctions de Keldysh sont données explicitement par

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}^{i<}_{\mathbf{k}\alpha\beta}(t'-t) &= i f(E^i_{\mathbf{k}})\exp[-iE^i_{\mathbf{k}}(t'-t)/\hbar] , \\
\mathcal{G}^{i>}_{\mathbf{k}\alpha\beta}(t'-t) &= -i(1-f(E^i_{\mathbf{k}}))\exp[-iE^i_{\mathbf{k}}(t'-t)/\hbar] ,
\end{aligned}
\tag{I.4}
$$

avec f la distribution de Fermi-Dirac et $E^i_{\mathbf{k}}$ la relation de dispersion correspondante. En substituant (I.4) dans l'expression précédente et en regroupant les termes on obtient

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{S}}_G(t) = -\frac{1}{N^2}\sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{q},\beta\\ i,j}}^{*}\mathrm{Im}\Bigg[& \Big\{ t_{\mathbf{kq}}^2 e^{i\Delta\varphi}\,\vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\uparrow}U_{\downarrow\downarrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} - |t_{\mathbf{kq}}|^2\vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\uparrow}U^{\dagger}_{\uparrow\uparrow}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow})^2\Big\}\frac{f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}-E^i_{\mathbf{k}}-i0^+} \\
& \Big\{ t_{\mathbf{kq}}^2 e^{i\Delta\varphi}\,\vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\downarrow}U_{\downarrow\uparrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow} - |t_{\mathbf{kq}}|^2\vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\downarrow}U^{\dagger}_{\downarrow\uparrow}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow})^2\Big\}\frac{1-f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}+E^i_{\mathbf{k}}+i0^+} \\
& + \Big\{ t_{\mathbf{kq}}^2 e^{i\Delta\varphi}\,\vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\uparrow}U_{\uparrow\downarrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow} - |t_{\mathbf{kq}}|^2\vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\uparrow}U^{\dagger}_{\uparrow\downarrow}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow})^2\Big\}\frac{1-f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}+E^i_{\mathbf{k}}-i0^+} \\
& + \Big\{ t_{\mathbf{kq}}^2 e^{i\Delta\varphi}\,\vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\downarrow}U_{\uparrow\uparrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow} - |t_{\mathbf{kq}}|^2\vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\downarrow}U^{\dagger}_{\downarrow\downarrow}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow})^2\Big\}\frac{f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}-E^i_{\mathbf{k}}+i0^+}\Bigg] .
\end{aligned}
\tag{I.5}
$$

En utilisant l'identité $1/(\omega \pm 0^+) = \mathrm{P}(1/\omega) \mp i\pi\delta(\omega)$, il est aisé de se convaincre que tous les termes comportant $i\pi\delta(\omega)$ disparaissent en raison des propriétés des distributions de Fermi-Dirac. On se retrouve donc avec

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{S}}_G(t) = \frac{1}{N^2}\sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{q},\beta\\ i,j}}^{*} \mathrm{Im}\Bigg[&\Big\{t_{\mathbf{kq}}^2 e^{i\Delta\varphi}\,\vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\uparrow}U_{\downarrow\downarrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} - |t_{\mathbf{kq}}|^2\vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\uparrow}U^\dagger_{\uparrow\uparrow}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow})^2\Big\}\mathrm{P}\left(\frac{f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}-E^i_{\mathbf{k}}}\right)\\
&+\Big\{t_{\mathbf{kq}}^2 e^{i\Delta\varphi}\,\vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\downarrow}U_{\downarrow\uparrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow} - |t_{\mathbf{kq}}|^2\vec{\sigma}_{\uparrow\beta}U_{\beta\downarrow}U^\dagger_{\downarrow\uparrow}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow})^2\Big\}\mathrm{P}\left(\frac{1-f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}+E^i_{\mathbf{k}}}\right)\\
&+\Big\{t_{\mathbf{kq}}^2 e^{i\Delta\varphi}\,\vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\uparrow}U_{\uparrow\downarrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow} - |t_{\mathbf{kq}}|^2\vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\uparrow}U^\dagger_{\uparrow\downarrow}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow})^2\Big\}\mathrm{P}\left(\frac{1-f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}+E^i_{\mathbf{k}}}\right)\\
&+\Big\{t_{\mathbf{kq}}^2 e^{i\Delta\varphi}\,\vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\downarrow}U_{\uparrow\uparrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow} - |t_{\mathbf{kq}}|^2\vec{\sigma}_{\downarrow\beta}U_{\beta\downarrow}U^\dagger_{\downarrow\downarrow}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow})^2\Big\}\mathrm{P}\left(\frac{f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}-E^i_{\mathbf{k}}}\right)\Bigg]\,.
\end{aligned}\tag{I.6}$$

À présent, calculons la composante selon $\hat{x}$ du courant. On trouve

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{S}}^x_G(t) = \frac{1}{N^2}\sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{q},\beta\\ i,j}}^{*} \mathrm{Im}\Bigg[&\Big\{t_{\mathbf{kq}}^2 e^{i\Delta\varphi}\,\sigma^x_{\uparrow\downarrow}U_{\downarrow\uparrow}U_{\downarrow\downarrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} - |t_{\mathbf{kq}}|^2\sigma^x_{\uparrow\downarrow}U_{\downarrow\uparrow}U^\dagger_{\uparrow\uparrow}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow})^2\Big\}\mathrm{P}\left(\frac{f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}-E^i_{\mathbf{k}}}\right)\\
&+\Big\{t_{\mathbf{kq}}^2 e^{i\Delta\varphi}\,\sigma^x_{\uparrow\downarrow}U_{\downarrow\downarrow}U_{\downarrow\uparrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow} - |t_{\mathbf{kq}}|^2\sigma^x_{\uparrow\downarrow}U_{\downarrow\downarrow}U^\dagger_{\downarrow\uparrow}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow})^2\Big\}\mathrm{P}\left(\frac{1-f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}+E^i_{\mathbf{k}}}\right)\\
&+\Big\{t_{\mathbf{kq}}^2 e^{i\Delta\varphi}\,\sigma^x_{\downarrow\uparrow}U_{\uparrow\uparrow}U_{\uparrow\downarrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow} - |t_{\mathbf{kq}}|^2\sigma^x_{\downarrow\uparrow}U_{\uparrow\uparrow}U^\dagger_{\uparrow\downarrow}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow})^2\Big\}\mathrm{P}\left(\frac{1-f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}+E^i_{\mathbf{k}}}\right)\\
&+\Big\{t_{\mathbf{kq}}^2 e^{i\Delta\varphi}\,\sigma^x_{\downarrow\uparrow}U_{\uparrow\downarrow}U_{\uparrow\uparrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow} - |t_{\mathbf{kq}}|^2\sigma^x_{\downarrow\uparrow}U_{\uparrow\downarrow}U^\dagger_{\downarrow\downarrow}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow})^2\Big\}\mathrm{P}\left(\frac{f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}-E^i_{\mathbf{k}}}\right)\Bigg]\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \frac{1}{N^2}\sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{q}\\ i,j}}^{*} \mathrm{Im}\Bigg[&\Big\{t_{\mathbf{kq}}^2 e^{i\Delta\varphi}\,e^{i\phi}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} - |t_{\mathbf{kq}}|^2 e^{i\phi}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow})^2\Big\}\mathrm{P}\left(\frac{f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}-E^i_{\mathbf{k}}}\right)\\
+&\Big\{t_{\mathbf{kq}}^2 e^{i\Delta\varphi}\,(-e^{-i\phi})\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow} + |t_{\mathbf{kq}}|^2 e^{i\phi}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow})^2\Big\}\mathrm{P}\left(\frac{1-f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}+E^i_{\mathbf{k}}}\right)\\
+&\Big\{t_{\mathbf{kq}}^2 e^{i\Delta\varphi}\,e^{i\phi}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow} - |t_{\mathbf{kq}}|^2 e^{-i\phi}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow})^2\Big\}\mathrm{P}\left(\frac{1-f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}+E^i_{\mathbf{k}}}\right)\\
+&\Big\{t_{\mathbf{kq}}^2 e^{i\Delta\varphi}\,(-e^{-i\phi})\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow} + |t_{\mathbf{kq}}|^2 e^{-i\phi}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow})^2\Big\}\mathrm{P}\left(\frac{f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}-E^i_{\mathbf{k}}}\right)\Bigg]\frac{\sin\theta}{2}\,.
\end{aligned}$$

En remarquant que $\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} = \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow} = \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow} = \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}$, en supposant $t^2_{\mathbf{kq}} = |t_{\mathbf{kq}}|^2$ et en regroupant des termes, ceci devient

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{S}}^x_G(t) = \frac{1}{N^2}\sum^{*}_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{q}\\ i,j}} |t_{\mathbf{kq}}|^2 \Bigg[& \Bigg\{ \mathrm{Im}\Big(e^{i\Delta\varphi}\, e^{i\phi} + e^{i\Delta\varphi}\,(-e^{-i\phi}) \Big) \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} \\
& \quad - \sin\phi \left((\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow})^2 + (\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow})^2 \right) \Bigg\} \mathrm{P}\left(\frac{f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}} - E^i_{\mathbf{k}}} \right) \\
& + \Bigg\{ \mathrm{Im}\Big(e^{i\Delta\varphi}\,(-e^{-i\phi}) + e^{i\Delta\varphi}\, e^{i\phi} \Big) \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} \\
& \quad + \sin\phi \left((\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow})^2 + (\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow})^2 \right) \Bigg\} \mathrm{P}\left(\frac{1 - f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}} + E^i_{\mathbf{k}}} \right) \Bigg] \frac{\sin\theta}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \frac{1}{N^2}\sum^{*}_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{q}\\ i,j}} |t_{\mathbf{kq}}|^2 \Bigg[& \Bigg\{ \mathrm{Im}\Big(2i\sin\phi e^{i\Delta\varphi} \Big) \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} \\
& \quad - \sin\phi \left((\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow})^2 + (\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow})^2 \right) \Bigg\} \mathrm{P}\left(\frac{f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}} - E^i_{\mathbf{k}}} \right) \\
& + \Bigg\{ \mathrm{Im}\Big(2i\sin\phi e^{i\Delta\varphi} \Big) \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} \\
& \quad + \sin\phi \left((\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow})^2 + (\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow})^2 \right) \Bigg\} \mathrm{P}\left(\frac{1 - f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}} + E^i_{\mathbf{k}}} \right) \Bigg] \frac{\sin\theta}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \frac{1}{N^2}\sum^{*}_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{q}\\ i,j}} |t_{\mathbf{kq}}|^2 \Bigg[& \Bigg\{ \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} \cos\Delta\varphi - \left((\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow})^2 + (\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow})^2 \right) \Bigg\} \mathrm{P}\left(\frac{f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}} - E^i_{\mathbf{k}}} \right) \\
& + \Bigg\{ \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} \cos\Delta\varphi + \left((\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow})^2 + (\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow})^2 \right) \Bigg\} \mathrm{P}\left(\frac{1 - f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}} + E^i_{\mathbf{k}}} \right) \Bigg] \\
& \times \sin\theta \sin\phi
\end{aligned}$$

La composante selon $\hat{x}$ du courant de moment magnétique alterné peut donc récrire comme suit

$$\dot{\mathbf{S}}_G^x(t) = \big(I_c + J_c \cos\Delta\varphi\big) \sin\theta \sin\phi \ , \tag{I.7}$$

avec

$$\begin{aligned} I_c = \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{q} \\ i,j}}^{*} |t_{\mathbf{kq}}|^2 \Bigg[\Big[(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow})^2 + (\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow})^2 \Big] \mathrm{P}\bigg(\frac{f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}} - E^i_{\mathbf{k}}} \bigg) \\ + \Big[(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow})^2 + (\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow})^2 \Big] \mathrm{P}\bigg(\frac{1 - f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}} + E^i_{\mathbf{k}}} \bigg) \Bigg] \end{aligned} \tag{I.8}$$

et

$$J_c = \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{q} \\ i,j}}^{*} |t_{\mathbf{kq}}|^2 \, \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow} \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} \, \mathrm{P} \left[\frac{f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}} - E^i_{\mathbf{k}}} + \frac{1 - f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}} + E^i_{\mathbf{k}}} \right] \tag{I.9}$$

De la même façon, on trouve

$$\dot{\mathbf{S}}_G^y(t) = -\big(I_c + J_c \cos\Delta\varphi\big) \sin\theta \cos\phi \ , \tag{I.10}$$

$$\dot{\mathbf{S}}_G^z(t) = 0 \ , \tag{I.11}$$

ce qui permet de récrire le courant de moment magnétique alterné sous la forme finale

$$\dot{\mathbf{S}}_G(t) = \big(I_c + J_c \cos\Delta\varphi\big) \hat{s}_D \times \hat{s}_G \ , \tag{I.12}$$

Annexe J

Calcul détaillé du courant Josephson supraconducteur dans le cas avec coexistence AF/SC

Dans cette annexe, nous rendons explicites les détails du calcul permettant d'obtenir l'expression finale du courant supraconducteur (5.33) dans le cas avec coexistence AF-SC à partir des équations (5.32) et (5.25).

Le calcul de (5.32) en réponse linéaire est presque identique au calcul du courant de moment alterné. En effet, on n'a qu'à reprendre ce dernier à l'équation (I.6) et remplacer tous les facteurs $\vec{\sigma}_{\alpha\beta}U_{\beta\delta}$ par $U_{\alpha\delta}$ puis multiplier le tout par un facteur $2/\hbar$:

$$\begin{aligned}
\dot{N}_G(t) = \frac{2}{N^2\hbar}\sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{q}\\ i,j}}^{*}\mathrm{Im}\Bigg[&\left\{t_{\mathbf{kq}}^2 e^{i\Delta\varphi}\, U_{\uparrow\uparrow}U_{\downarrow\downarrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} - |t_{\mathbf{kq}}|^2 U_{\uparrow\uparrow}U^{\dagger}_{\uparrow\uparrow}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow})^2\right\}\mathrm{P}\left(\frac{f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}-E^i_{\mathbf{k}}}\right)\\
&+\left\{t_{\mathbf{kq}}^2 e^{i\Delta\varphi}\, U_{\uparrow\downarrow}U_{\downarrow\uparrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow} - |t_{\mathbf{kq}}|^2 U_{\uparrow\downarrow}U^{\dagger}_{\downarrow\uparrow}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow})^2\right\}\mathrm{P}\left(\frac{1-f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}+E^i_{\mathbf{k}}}\right)\\
&+\left\{t_{\mathbf{kq}}^2 e^{i\Delta\varphi}\, U_{\downarrow\uparrow}U_{\uparrow\downarrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow} - |t_{\mathbf{kq}}|^2 U_{\downarrow\uparrow}U^{\dagger}_{\uparrow\downarrow}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow})^2\right\}\mathrm{P}\left(\frac{1-f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}+E^i_{\mathbf{k}}}\right)\\
&+\left\{t_{\mathbf{kq}}^2 e^{i\Delta\varphi}\, U_{\downarrow\downarrow}U_{\uparrow\uparrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow} - |t_{\mathbf{kq}}|^2 U_{\downarrow\downarrow}U^{\dagger}_{\downarrow\downarrow}\,(\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow})^2\right\}\mathrm{P}\left(\frac{f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}-E^i_{\mathbf{k}}}\right)\Bigg].
\end{aligned} \tag{J.1}$$

On remarque alors que tous les termes proportionnels à $|t_{\mathbf{kq}}|^2$ (contribution des paires particule-trou) sont réels, de sorte que seuls ceux proportionnels à $t^2_{\mathbf{kq}}$ demeurent. L'expression précédente devient alors

$$\begin{aligned}\dot{N}_G(t) = \frac{2}{N^2\hbar}\sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{q}\\ i,j}}^{*}\mathrm{Im}\Bigg[t^2_{\mathbf{kq}}e^{i\Delta\varphi}\Bigg\{\Big(U_{\uparrow\uparrow}U_{\downarrow\downarrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} + U_{\downarrow\downarrow}U_{\uparrow\uparrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\Big)\mathrm{P}\left(\frac{f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}-E^i_{\mathbf{k}}}\right)\\ + \Big(U_{\uparrow\downarrow}U_{\downarrow\uparrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow} + U_{\downarrow\uparrow}U_{\uparrow\downarrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow}\Big)\mathrm{P}\left(\frac{1-f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}+E^i_{\mathbf{k}}}\right)\Bigg\}\Bigg]\end{aligned} \tag{J.2}$$

$$\begin{aligned}= \frac{2}{N^2\hbar}\sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{q}\\ i,j}}^{*}\mathrm{Im}\Bigg[t^2_{\mathbf{kq}}e^{i\Delta\varphi}\Bigg\{2U_{\uparrow\uparrow}U_{\downarrow\downarrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow}\mathrm{P}\left(\frac{f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}-E^i_{\mathbf{k}}}\right)\\ + 2U_{\uparrow\downarrow}U_{\downarrow\uparrow}\,\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow}\mathrm{P}\left(\frac{1-f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}+E^i_{\mathbf{k}}}\right)\Bigg\}\Bigg]\ .\end{aligned} \tag{J.3}$$

En utilisant $\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} = \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\downarrow}$, en supposant $t^2_{\mathbf{kq}} = |t_{\mathbf{kq}}|^2$ et en remplaçant les éléments de la matrice unitaire U par leur valeur, on obtient

$$\begin{aligned}\dot{N}_G(t) = \frac{4}{N^2\hbar}\sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{q}\\ i,j}}^{*}\mathrm{Im}\Bigg[|t_{\mathbf{kq}}|^2e^{i\Delta\varphi}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow}\Bigg\{\cos^2(\theta/2)\mathrm{P}\left(\frac{f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}-E^i_{\mathbf{k}}}\right)\\ - \sin^2(\theta/2)\mathrm{P}\left(\frac{1-f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}+E^i_{\mathbf{k}}}\right)\Bigg\}\Bigg]\\ = \frac{4}{N}\sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{q}\\ i,j}}^{*}|t_{\mathbf{kq}}|^2\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow}\Bigg\{\cos^2(\theta/2)\mathrm{P}\left(\frac{f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}-E^i_{\mathbf{k}}}\right)\\ - \sin^2(\theta/2)\mathrm{P}\left(\frac{1-f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}+E^i_{\mathbf{k}}}\right)\Bigg\}\sin\Delta\varphi\ .\end{aligned} \tag{J.4}$$

En vertu des identités trigonométriques $\cos^2(\theta/2) = (1+\cos\theta)/2$ et $\sin^2(\theta/2) = (1-\sin\theta)/2$, ceci devient

$$\begin{aligned}\dot{N}_G(t) = \frac{4}{N^2\hbar}\sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{q}\\ i,j}}^{*}|t_{\mathbf{kq}}|^2\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow}\tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow}\Bigg\{\frac{1+\cos\theta}{2}\,\mathrm{P}\left(\frac{f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}-E^i_{\mathbf{k}}}\right)\\ - \frac{1-\cos\theta}{2}\,\mathrm{P}\left(\frac{1-f(E^j_{\mathbf{q}})-f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}}+E^i_{\mathbf{k}}}\right)\Bigg\}\sin\Delta\varphi\ .\end{aligned} \tag{J.5}$$

Finalement, cette dernière expression peut être récrite sous une forme analogue à l'expression (5.27) pour le courant de moment magnétique alterné :

$$\dot{N}_G(t) = \left(\bar{I}_c + \bar{J}_c \cos\theta\right) \sin\Delta\varphi \ , \tag{J.6}$$

avec

$$\bar{I}_c \equiv \frac{2}{N^2\hbar} \sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{q} \\ i,j}}^{*} |t_{\mathbf{kq}}|^2 \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow} \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} \, \mathrm{P}\left[\frac{f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}} - E^i_{\mathbf{k}}} - \frac{1 - f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}} + E^i_{\mathbf{k}}}\right] , \tag{J.7}$$

et

$$\bar{J}_c \equiv \frac{2}{N^2\hbar} \sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{q} \\ i,j}}^{*} |t_{\mathbf{kq}}|^2 \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\uparrow\uparrow} \tilde{\Gamma}^{ij}_{\mathbf{kq}\downarrow\downarrow} \, \mathrm{P}\left[\frac{f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}} - E^i_{\mathbf{k}}} + \frac{1 - f(E^j_{\mathbf{q}}) - f(E^i_{\mathbf{k}})}{E^j_{\mathbf{q}} + E^i_{\mathbf{k}}}\right] . \tag{J.8}$$

Bibliographie

[1] S. A. Wolf, D. D. Awschalom, R. A. Buhrman, J. M. Daughton, S. von Molnár, M. L. Roukes, A. Y. Chtchelkanova& D. M. Treger, Science **294**, 1488 (2007).

[2] I. Zütic, J. Fabian and S. D. Sarma, *Rev. Mod. Phys.* **76** (2004) 323.

[3] G. A. Prinz, *Phys. Today* **48**, 4 (1995) 58.

[4] G. Binasch, P. Grünberg, F. Saurenbach & W. Zinn, *Phys. Rev. B* **39**, 4828 (1989).

[5] M. N. Baibich, J. M. Broto, A. Fert, F. Nguyen van Dau, F. Petroff, P. Eitenne, G. Creuzet, A. Friederich & J. Chazelas, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2472 (1988).

[6] G. Schmidt, D. Ferrand, L. W. Molenkamp, A. T. Filip & B. J. van Wees, *Phys. Rev. B* **62**, R4790 (2000).

[7] P. R. Hammar, B. R. Bennett, M. J. Yang & M. Johnson, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 203 (1999).

[8] H. J. Zhu, M. Ramsteiner, H. Kostial, M. Wassermeier, H. P. Schönherr & K. H. Ploog, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 016601 (2001).

[9] A. Brataas, Y. V. Nazarov & G. E. W. Bauer, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2481 (2000) ; A. Brataas, Y. Tserkovnyak, G. E. W. Baure & B. I. Haplerin, *Phys. Rev. B* **66**, 060404(R) (2002).

[10] Q.-f. Sun, H. Guo, & J. Wang, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 258301 (2003).

[11] P. Sharma & P. W. Brouwer, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 166801 (2003).

[12] M. J. Stevens, A. L. Smirl, R. D. R. Bhat, A. Najmaie, J. E. Sipe & H.M. van Driel,*Phys. Rev. Lett.* **90**, 136603 (2003).

[13] J. Hubner, W. W. Ruhle, M. Klude, D. Hommel, R. D. R. Bhat, J. E. Sipe & H. M. van Driel, *Phys. Rev. Lett. 90*, 216601 (2003).

[14] R. D. R. Bhat and J. E. Sipe, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5432 (2000).

[15] F. Meier & D. Loss, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 167204 (2003).

[16] F. Schütz, M. Kollar & P. Kopietz, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 017205 (2003).

[17] B. Wang, J. Wang, J. Wang, and D. Y. Xing, *Phys. Rev. B* **69**, 174403 (2004).

[18] O. Strelcyk, T. Korb & H. Schoeller, *Phys. Rev. B* **72**, 165343 (2005).

[19] K. Sasaoka & C. Ishii, Journal of the Physical Society of Japan **76**, 074721 (2007).

[20] S. Murakami, N. Nagaosa & S.-C. Zhang, *Science* **301**, 1368 (2003).

[21] J. Sinova, D. Culcer, Q. Niu, N. A. Sinitsyn, T. Jungwirth A. & H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 126603 (2004).

[22] E. I. Rashba, *Phys. Rev. B* **68**, 241315(R) (2003).

[23] P. Bruno & V. K. Dugaev, *Phys. Rev. B* **72**, 241302(R) (2005).

[24] J. König, M. C. Bønsager & A. H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 187202 (2001).

[25] Y.-L. Lee & Y.-W. Lee, *Phys. Rev. B* **68**, 184413 (2003).

[26] F. S. Nogueira & K.-H. Bennemann, *Europhys. Lett.* **67**, 620 (2004).

[27] J. Wang & K. S. Chan, *Phys. Rev. B* **74**, 035342 (2006).

[28] B. D. Josephson, *Phys. Lett.* **1**, 251 (1962).

[29] F. Paul Esposito, L.-P. Guay, R. B. MacKenzie, M. B. Paranjape & L. C. R. Wijewardhana, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 241602 (2007).

[30] A. V. Kimel & al., Nature **429**, 850 (2004).

[31] J. Linder & al., Phys. Rev. B **75**, 024508 (2007).

[32] D. Chassé & A.-M.S. Tremblay, cond-mat.str-el arXiv :0811.2999v1 (2008).

[33] J. R. Schrieffer, X. G. Wen & S. C. Zhang , *Phys. Rev. B* **39**, 16 (1989).

[34] J. Hubbard, *Proc. R. Soc. London*, Ser. A **276**, 283 (1963) ; voir aussi J. E. Hirsch, *Phys. Rey. B* **31**, 4403 (l985).

[35] I.V. Bobkova, P. J. Hirschfeld & Yu. S. Barash, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 037005 (2005).

[36] V. Ambegaokar & A. Baratoff, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 486 (1963). Errata, V. Ambegaokar & A. Baratoff, Phys. Rev. Lett. **11**, 104 (1963).

[37] A. L. Fetter & J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, Dover, New-York (2003).

[38] Y. Nakamura, Y. A. Pashkin & J. S. Tsai, *Nature* **398**, 786 (1999).

[39] A. W. Overhauser, *Phys. Rev.* **128**, 1437 (1962).

[40] D. Sénéchal, *Mécanique Quantique*, Notes de Cours (PHY-731), Université de Sherbrooke (2000).

[41] A. Altland & B. Simons, *Condensed Matter Field Theory*, Cambridge University Press (2006).

[42] C. Kittel, *Phys. Rev.* **82**, 565 (1951).

[43] K. Yosida, *Theory of Magnetism*, Springer (1996).

[44] Kulik I. O. & Omel'yanchuk A. N., *Sov. J. Low Temp. Phys.* **4** (1978) 142.

[45] M. P. Anantram, M. S. Lundstrom & D. E. Nikonov, arXiv :cond-mat/0610247v2, (2007).

[46] B. Kyung, *Phys. Rev. B* **62**, 9083 (2000).

[47] G. C. Psaltakis & E. W. Fenton, *J. Phys. C* **16**, 3913 (1983).

[48] M. Kato & K. Machida, *J. Phys. Soc. Jpn.* **56**, 2136 (1987).

[49] M. Murakami & H. Fukuyama, *J. Phys. Soc. Jpn.* **67**, 2784 (1998).

[50] Y. G. Shen & Z. H. Yang, *Eur. Phys. Lett.* **78** (2007) 17003.

[51] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press (2003).

[52] G. Ishii, *Progr. Theor. Phys.* **44**, 1525 (1970).

[53] A. M. Zagoskin, *Quantum Theory of Many-Body Systems*, Springer-Verlag, New-York (1998).

[54] E.C. Stoner, Proc. R. Soc. London, Ser. A **154**, 656 (1936).

[55] H. Bruus & K. Flensberg, *Many-body quantum theory in condensed matter physics*, (2003).